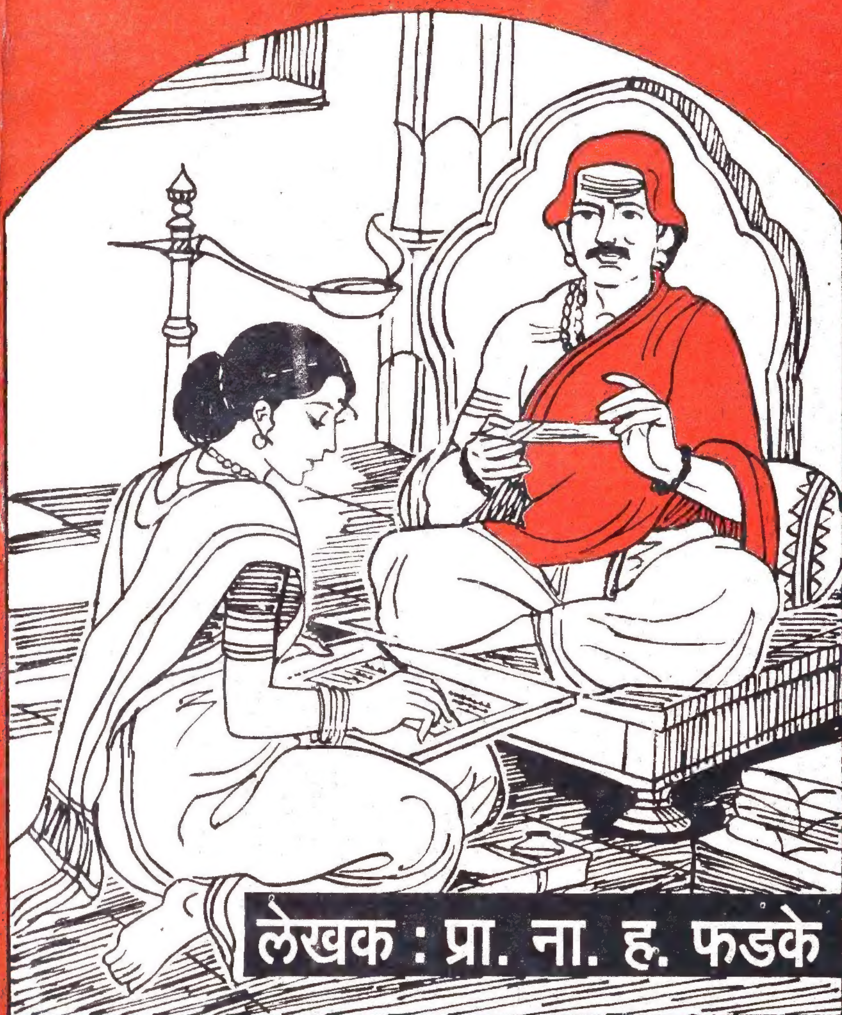
भारतीय गणिती



लेखक : प्रा. ना. ह. फडके

VA

भारतीय गणिती

लेखक

प्रा. ना. ह. फडके



'वरदा', सेनापती बापट मार्ग, पुणे-१६

● **मुद्रक व प्रकाशक :**
ह. अ. भावे (वरदा बुक्स)
'वरदा' सेनापती बापट मार्ग
पुणे - ४११०१६.

● **मुद्रण स्थळ :**
हायलाईट प्रिंटर्स,
२५०/११, शनिवार पेठ,
पुणे - ४११ ०३०

● **मुखपृष्ठ :** वसंत सहस्रबुद्धे

● **पहिली आवृत्ती :** ऑगस्ट १९५३
दुसरी आवृत्ती : फेब्रुवारी १९९३

● **प्रकाशन क्रमांक :** ५२३



– प्रकाशकाचे निवेदन –

प्रा. ना. ह. फडके यांचे 'लीलावती पुर्नदर्शन' हे पुस्तक वितरणासाठी वरदा बुक्स कडेच आहे. त्या व 'भारतीय गणिती' या पुस्तकाचे हक्क श्रीमती सुभद्राबाई यांनी 'वरदा बुक्स' कडे सोपविले याबद्दल मी त्यांचा ऋणी आहे. 'लीलावती पुर्नदर्शन' या पुस्तकाबाबत प्रा. ना. ह. फडके यांचा व माझा पुष्कळ पत्रव्यवहार १९७१उ७२ मध्येच झाला होता. भारतामध्ये गणितशास्त्राची प्रगती सर्व जगापेक्षा आधी किती झाली होती, ही वस्तुस्थिती 'भारतीय गणिती' या पुस्तकाद्वारे विद्यार्थ्यांना समजणार आहे. या पुस्तकाच्या वाचनातून भावी काळातील भास्कराचार्यांपेक्षाही श्रेष्ठ गणिती महाराष्ट्रातील विद्यार्थ्यांमधून उद्या निर्माण होऊ शकेल ही अशा बाळगूनच हे पुस्तक मी विद्यार्थ्यांच्या हाती देत आहे.

वरदा बुक्स

ह. अ. भावे

प्रस्तावना

इंग्रजी भाषेंत (Men of Mathematics)$ या नांवाचें एक पुस्तक पंधरा वर्षांपूर्वी प्रसिद्ध झालें. तें ज्या वेळीं प्रस्तुत लेखकाच्या वाचनांत आलें त्यावेळीं त्यास असें आढळून आलें कीं, या ग्रंथांत एकाही भारतीय गणित्याचें चरित्र नाहीं. आमच्या देशांत भास्कराचार्य, ब्रह्मगुप्त आणि रामानुजन् यांसारखे दिगंत कीर्तीचे गणिती होऊन गेले असतां त्यांच्यापैकीं एकासहि या पुस्तकांत स्थान मिळूं नये हें आपलें केवढें दुर्भाग्य ! नाहीं म्हणावयास इंग्रजी भाषेंत गणितशास्त्राच्या इतिहासाचे जे ग्रंथ आहेत त्यांत चार दोन पानें हिंदी गणितास दिलेलीं आढळतात. पण त्यांत सुद्धां आमच्या प्राचीन गणित्यांनीं बऱ्याच गोष्टी ग्रीक लोकांपासून उसनवार घेतल्या असें दाखविल्याशिवाय हे इतिहासकार राहात नाहींत. आम्ही दीडशें वर्षें इग्रजांचे गुलाम होतों. त्यामुळें आमच्या मानबिंदूवर आघात करणें, आमच्या शोधांकडे अनुदारवृत्तीनें पाहाणें व आम्ही कनिष्ठ प्रकारचे लोक आहोंत असा प्रचार करणें हें युरोपीय लोक एक प्रकारचें भूषण मानीत. आतां जमाना बदलला आहे. आमचें स्वातंत्र्य आमच्या हातीं आलें आहे व पाश्चात्यांनीं समजून किंवा न समजतां केलेल्या अन्यायांचें परिमार्जन करण्याची वेळ आलेली आहे.

म्हणून भारतीय गणितज्ञांचीं छोटीं चरित्रें वाचकांना सादर करण्याचा उपक्रम आम्हीं या पुस्तकाद्वारें केला आहे. या पुस्तकांत एकूण चार व्यक्तींचीं चरित्रें गुंफण्याचा प्रयत्न केला आहे. त्यांत आर्यभट (४२१),* ब्रह्मगुप्त (५९८), भास्कराचार्य (१११४) व रामानुजन् (१८८८) हे चार जागतिक कीर्तीचे गणिती घेतले आहेत. यांत प्राचीन काळचे तीन व अर्वाचीन काळचा एक असे चार गणिती आहेत. कालाच्या दृष्टीनें ही

$ Men of Mathematics' by E. T Bell 1937.

* सनाचे आंकडे जन्मकालासंबंधीं आहेत.

विभागणी कदाचित् योग्य ठरणार नाहीं. तसेंच याच चार गणित्यांना पुस्तकांत स्थान दिल्यामुळें, वराहमिहिर, महावीर, श्रीधराचार्य, गणेश दैवज्ञ इत्यादि अनेक प्राचीन गणितज्ञांवर अन्याय झाला आहे असें वाचकांना वाटेल. आधुनिक भारतीय गणित्यांपैकीं एक रामानुजन् यालाच स्थान दिल्यामुळें कांहीं अर्वाचीन गणितज्ञ व रॅंग्लर यांनाही अन्याय झाला असें वाटेल. तथापि या चौघांचीच निवड करण्याचें कारण असें कीं, यांनीं केवलगणित (Pure Mathematics) व ग्रहगणित (Astronomy) या शास्त्रांत जे महत्त्वाचे शोध लावले ते जगन्मान्य झाले आहेत व त्या प्रकारचा निर्देश गणित-इतिहासाच्या पुस्तकांत ठिकठिकाणीं आलेला आहे. तसेंच प्राचीन काळच्या सर्वच गणित्यांचीं चरित्रें या छोटेखानी पुस्तकांत देणें शक्य नव्हतें. जागेच्या अभावीं सुप्रसिद्ध अशा या चार गणित्यांचाच समावेश पुस्तकांत केलेला आहे.

हें पुस्तक लिहितांना प्रत्येक गणितज्ञाच्या चरित्राचे तीन भाग कल्पिले आहेत. पहिल्यांदा त्या व्यक्तीच्या जीवनचरित्राची माहिती, दुसऱ्यांत त्यानें लावलेले शोध व शेवटीं त्याची योग्यता असा क्रम ठेविला आहे. आर्यभट व ब्रह्मगुप्त यांना आतां १४०० वर्षें होऊन गेलीं तर भास्कराचार्यास ८०० वर्षें झालीं. इतक्या दीर्घ कालावधीनंतर त्यांच्या वैयक्तिक जीवन चरित्रासंबंधीं आपणांस फारशी माहिती उपलब्ध झाली नाहीं तर त्यांत आश्चर्य वाटण्याचें कारण नाहीं. उदाहरणार्थ आर्यभट हा कोणत्या राजाच्या पदरीं होता, भास्कराचार्य उज्जयिनीस काम करीत होता किंवा नाहीं, लीलावती नांवाची भास्कराचार्यांची मुलगी खरोखर होती किंवा नाहीं इत्यादि अनेक प्रश्नांवर प्रकाश पाडण्यासारखी माहिती आम्हांला नाहीं. पण जी काय तुटपुंजी सामग्री कै. शं. बा. दीक्षित, कै. पंडित सुधाकर द्विवेदी विभूतिभूषण दत्त वगैरे लेखकांनीं अतिशय परिश्रमानें जमविली तिचा मी भरपूर उपयोग केला आहे.

त्यानंतर प्रत्येक गणितज्ञानें अंकगणित, बीजगणित, रेखागणित यांत काय कार्य केलें याची सोदाहरण माहिती दिली आहे. खगोलशास्त्र हा

आर्यभट, ब्रह्मगुप्त व भास्कराचार्य यांच्या ग्रंथाचा मुख्य विषय. त्या विषयांत त्यांनीं केलेले शोध व गणित हें जसें गहन आहे तसेंच तें सामान्य वाचकाच्या आंवाक्याबाहेरचें आहे. लेखक स्वतः गणिती असला तरी प्राचीन पद्धतीचें ज्योतिष तोही शिकलेला नाहीं. या सर्व गोष्टी विचारांत घेतां आर्यभट,, ब्रह्मगुप्त, भास्कराचार्य तसेंच रामानुजन् यांनीं वर सांगितलेल्या तीन विषयांत जें काम केलें त्याचाच परिचय वाचकांस करून दिला आहे. ज्योतिर्गणितासंबंधीं प्राचीनकाळीं पांच सिद्धांत प्रचलित असत. त्यांत वेळोवेळीं आर्यभट, ब्रह्मगुप्त, भास्कराचार्य वगैरेंनीं सुधारणा केल्या. पण तो विषय ज्यांना वाचण्याची कुवत आहे त्यांनीं 'भारतीय ज्योतिःशास्त्र' हा ग्रंथ वाचावा. प्रस्तुत पुस्तकांत प्रामुख्यानें या लोकांचे गणितशास्त्रांतले शोधच विचारांत घेतले आहेत.

पुस्तकांत जागोजाग संस्कृत अवतरणें दिलीं आहेत व विषय स्पष्ट व्हावा म्हणून कोठें कोठें उदाहरणें व रीती दिल्या आहेत. हें पुस्तक गणिता-सारख्या विषयाचें व मोठ्या व्यक्तींच्या शोधांसंबंधीं असल्यानें लघुकथेप्रमाणें चटकन् वाचन करण्याचें नाहीं. त्याचें मनन करावें लागणारच. क्वचित् प्रत्यक्ष उदाहरण घेऊन दिलेल्या रीतीप्रमाणें सोडवावेंही लागेल. तथापि दिलेला विषय क्लिष्ट होऊं नये याकरितां शक्य तितका प्रयत्न केला आहे. वाचकाला मॅट्रिकपर्यंतचें गणित येतें आहे अशी कल्पना करून पुस्तकांत विवेचन केलें आहे.

पुस्तक वाचनानंतर हिंदूंची अंकपद्धति, अंकगणितांतलीं अष्ट कर्मे, बीजगणितांतले शोध, भूमितींतल्या आकृतींचे गुणधर्म, पायथ्यागोरसाचा सिद्धांत, पृथ्वीचें अक्षभ्रमण, गुरुत्वाकर्षण इत्यादि अनेक गोष्टींचें सम्यग्ज्ञान आपणांस होतें हें वाचून वाचकांस आश्चर्य वाटेल. प्राचीन गणित्यांत कांहीं दोषहि होते. तात्त्विक वादविवादांत पूर्वपक्ष-उत्तरपक्ष ज्या काळांत मांडले जात त्या काळांत भूमितीच्या प्रमेयाला सिद्धता लागते ही गोष्ट

आमच्या गणित्यांच्या लक्षांत न यावी हें एक आठवें आश्चर्य आहे. शून्याचा व्यवहार भास्कराचार्यांस देखील नीट समजला नाहीं. तो $\frac{६३}{०} \times ० = ६३$ असें म्हणतो. पृथ्वी वर्षांत सूर्याभोंवतीं एक प्रदक्षिणा करते व सूर्यमालेचा मध्य सूर्यच आहे ही गोष्ट आमच्या गणितज्ञांच्या लक्षांत आली नाहीं. याचें मुख्य कारण आमचे गणकभास्कर व गणकचूडामणि हे फलज्योतिष व जातक हें मुख्य शास्त्र मानीत. ग्रहज्योतिष हें त्यांच्या मतें फलज्योतिषाची दासी होतें व गणित हें ज्योतिःशास्त्राची दासी व फलज्योतिषाची उपदासी होतें. अशा रीतीनें गणितशास्त्र शिकण्याचें आमचें उद्दिष्ट चुकलें. कलेकरितां कला याप्रमाणें गणिताकरितां गणित ही आमची दृष्टि राहिली नाहीं. त्यात मुसलमान लोकांच्या स्वाऱ्यांनीं भास्कराचार्यां-नंतर उत्तर-दक्षिणेंत जो धुमाकूळ घातला त्यानें आमची ज्ञानगंगा गुप्त झाली. म्हणून मूळचें गणित आमचें असतांना आज पाश्चात्यांच्या ओंजळीनें आम्हांस पाणी प्यावें लागत आहे. असो.

पुस्तकाच्या प्रत्येक प्रकरणांत त्या त्या गणितज्ञाचें महत्त्व, त्याची योग्यता या संबंधीं थोडक्यांत विवरण केलें आहे. तसेंच शेवटीं त्या त्या चरित्रावर थोडे प्रश्न दिले आहेत.

हें पुस्तक लिहितांना त्यांत शुद्धाशुद्ध, चुकीची माहिती, कांहीं महत्त्वाचे मुद्दे गळणें, वगैरे अनेक दोष राहिलेले आहेत. लेखक साहित्यिक नसल्यानें गोंडस व गुलगुलीत भाषा तो लिहूं शकत नाहीं. तथापि आमच्या तरुण पिढीस भारतीय गणित्यांची कर्तबगारी कळावी एवढ्या इच्छेनें तो प्रेरित झालेला आहे. व ‘ अकरणात् मंदकरणं श्रेयः ’ या न्यायानें वाचकांनीं या पुस्तकाकडे पाहावें इतकीच जनतेस विनंति आहे.

पुस्तकावर जें तीनरंगी चित्र घाललें आहे तें मुंबईचे प्रसिद्ध चित्रकार श्री. मुळगांवकर यांच्या कुंचल्यांतून उतरलें आहे. त्यांत भास्कराचार्य

लीलावतीस पाटीगणित शिकवीत आहेत असें दाखविलें आहे. आमचें दुर्दैव असें कीं आमच्या चरित्रनायकांचीं जुनीं चित्रें सबंध देशांत कोठेंही मिळत नाहींत व आम्हांला केवळ चित्रकाराच्या कल्पनाशक्तीवर विसंबावें लागतें. तथापि अशा अडचणींतही इतकें उत्कृष्ट चित्र काढल्याबद्दल मी श्री. मुळगांवकर यांचे आभार मानतों. तसेंच ' दि टीचर्स आयडियल पब्लिशिंग हाउस ' चे व्यवस्थापक श्री. न. शं. कुलकर्णी यांनीं या पुस्तकाचें सर्वच बाळंतपण मोठ्या आस्थेनें करण्याचें पतकरलें याबद्दल त्यांचाही मी आभारी आहे.

शेवटीं ज्या ज्या ग्रंथकारांच्या अमूल्य ग्रंथांचा उपयोग हें पुस्तक लिहितांना झाला त्यांचें ऋण मान्य करून ही प्रस्तावना संपवितो.

दादर, प्रजापति भुवन,
गोखले रोड, मुंबई नं. २८
दिनांक २८ मे १९५३

नारायण हरि फडके

अनुक्रम

१. पहिला आर्यभट	१ ते २७
२. ब्रह्मगुप्त	२८ ते ५१
३. दुसरा भास्कराचार्य	५२ ते ८३
४. रामानुजन्	८४ ते १०४



प्रा. ना. ह. फडके

प्रा. ना. ह. फडके यांचा जन्म १ ऑक्टोबर, १९०२ व मृत्यू १ मार्च, १९७३ रोजी झाला. त्यांचे शालेय शिक्षण नाशिक आणि अमळनेर येथे झाले. शालेय जीवनात संस्कृतमध्ये अनेक पारितोषिके मिळविली. फर्ग्युसन कॉलेजमधून बी.ए. आणि एम्.ए. या पदव्या गणित विषय घेऊन प्रथम श्रेणीत प्राप्त केल्या. त्यांचे महाविद्यालयीन शिक्षण फर्ग्युसन कॉलेजमधून झाले. १९३१ ते १९५७ पर्यंत गणिताचे प्राध्यापक म्हणून 'इस्माइल युसफ कॉलेज' येथे अध्यापन केले. निवृत्तीनंतर १९५७ ते ६५ पर्यंत त्यांनी गणिताचे अध्यापन केले, गणित विषयाची महाविद्यालयीन अनेक पाठ्यपुस्तके लिहिली व ती प्रसिद्ध झाली. १९७१ मध्ये भास्कराचार्यांच्या पुस्तकाचे सविवरण लेखन 'लीलावती पुर्नदर्शन' या पुस्तकाद्वारे केले. 'विश्वकोशात' व 'सृष्टिज्ञान' मासिकात वेळोवेळी लेखन केले. खगोलशास्त्राचा तारामंडळाचा अभ्यास हा विशेष छंद होता. ब्रिज, टेनिस, बिलीयर्डस हे त्यांचे आवडीचे खेळ होते. विविध साहित्यसंस्था व शिक्षणसंस्था यांचे ते सभासद होते. फलज्योतिषशास्त्राचे भ्रामकत्व सिद्ध करण्याचा त्यांनी अखंड प्रयत्न केला व लिखाण केले. 'लीलावती पुर्नदर्शन', 'भारतीय गणिती' ही पुस्तके म्हणजे महाराष्ट्राच्या भावी पिढीसाठी ठेवलेला वारसाच म्हणता येईल.



१. पहिला आर्यभट

जन्मकाल :

भारतीय गणितशास्त्राच्या इतिहासांत शके ३९८ (इ. स. ४२१) हें वर्ष फारच महत्त्वाचें समजलें जातें. कारण या वर्षी गणितासंबंधींचा पहिला अधिकृत ग्रंथ लिहिणारा आर्यभट जन्मला. आर्यभटापूर्वी गणितशास्त्रावर ग्रंथरचना करणारे लेखक झाले असले पाहिजेत हें भक्षालि हस्तलिखितावरून दिसतें. पण यांपैकीं कोणाचेहि ग्रंथ आज तरी उपलब्ध नाहींत. यांतले कित्येक ग्रंथ व पोथ्या काळाच्या उदरांत गडप झाल्या असल्या पाहिजेत. म्हणून अधिकृत रीतीनें ज्या लेखकांसंबंधीं आम्हांस अल्पशी माहिती उपलब्ध आहे त्यांत आर्यभट पहिला होय. ज्या ग्रंथाचा लेखक अज्ञात आहे अशा वाङ्मयास अपौरुषेय वाङ्मय अशी आपण संज्ञा देतों. त्या दृष्टीनें पाहिल्यास गणितज्ञांत पहिला पौरुष लेखक आर्यभट हाच होय.

नांव :

आर्यभटाचें नांव आर्यभट कीं आर्यभट्ट याविषयीं बरीच चर्चा झालेली आढळते. संस्कृत वाङ्मय हें बरेंचसें छंदोबद्ध असल्यामुळें वृत्ताच्या सोयीसाठीं पुष्कळ ठिकाणीं ट् चा ट्ट् किंवा उलट होण्याची शक्यता आहे. अर्थाच्याच दृष्टीनें पाहिलें तर भट म्हणजे योद्धा व भट्ट म्हणजे पंडित. म्हणून आर्यभट्ट हेंच नांव योग्य वाटतें. कुमारिल भट्ट किंवा तशा प्रकारच्या पुष्कळ नांवांतून भट्ट हीच उपाधि वापरलेली आहे. कै. डॉ. भाऊ दाजी यांनीं आर्यभट कीं आर्यभट्ट याविषयीं बराच उहापोह केला आहे. पण आपलें नांव ही प्रत्येकाची खाजगी इस्टेट असल्यानें तें कसें लिहावें याविषयीं त्याचेंच मत ग्राह्य समजलें पाहिजे. Lord Thompson हें आपल्या नांवाचें स्पेलिंग कोणी Thomson

असें लिहिल्यास चिडत असत. तेव्हां स्वतः आर्यभट आपल्या ग्रंथास जर 'आर्यभटीय' असें म्हणतो तर आपणांस त्याच्या नांवांतला ट, ट्ट करून अधिक घट्ट करण्याचा काय अधिकार आहे ?

जन्मभूमि :

आर्यभटाची जन्मभूमि आणि कर्मभूमि नक्की कुठें होती याविषयीं विश्वसनीय माहिती अद्याप नीटशी उपलब्ध झालेली नाहीं. ज्याला मध्ययुगीन काल म्हणतात त्या कालांतील महत्त्वाच्या ऐतिहासिक घटनांचे काल अजून निश्चित नाहींत. कालिदास किंवा त्याचे समकालीन कवि, नाटककार किंवा इतर ऐतिहासिक व्यक्ति यांचे काल तरी अद्याप ठरविले गेले आहेत काय ? त्यांच्या चरित्रांतील प्रमुख घटना आपणांस ठाऊक झाल्या आहेत काय? मग कालिदासासारख्या कविकुलगुरूची जिथें ही अवस्था तिथें गणितज्ञ आर्यभटाविषयीं नीट माहिती मिळणें दुरापास्तच असणार. शिवाय प्राचीन लेखकांचा एक मोठा दोष असा कीं ग्रंथारंभीं किंवा ग्रंथाच्या शेवटीं ते स्वतःसंबंधीं फारच थोडी माहिती देत. स्वतःसंबधीं कांहीं लिहिलें तर आत्मस्तुति केल्यासारखें होईल म्हणून पुष्कळ प्राचीन लेखक स्वतःची माहिती देत नसत. कांहीं लेखक स्वतःचें नांव व स्थळ यांचा उल्लेख करीत. परंतु असे थोडेच आहेत. त्यामुळें झालें आहे काय कीं या पंधरा शतकांपूर्वी होऊन गेलेल्या प्रथितयश गणित्यांची त्रोटक माहिती मिळविणें हें महा कठीणकर्म होऊन बसलें आहे. खुद्द आर्यभटाच्या ग्रंथांतूनच त्याच्याविषयीं भरपूर माहिती उपलब्ध होत नाहीं. कांहीं लेखकांनीं आपल्या ग्रंथांत आरंभीं किंवा शेवटीं ग्रंथरचनेचा काल दिलेला आहे. क्वचित् जन्मशकहि दिलेला आहे; पण अशांची संख्या थोडी आहे.

आर्यभटानें आर्यभटीयाचे शेवटीं एका श्लोकांत आपल्या ग्रंथरचनेचा काल कलियुगारंभापासून ३६०० वर्षें असा दिला आहे तो म्हणतो :

षष्ट्यब्दानां षष्टिर्यदा व्यतीतास्त्रयश्च युगपादाः ।
त्र्यधिकविंशतिरब्दास्तदेह मम जन्मतोऽतीताः ॥

अर्थ : (मीं ग्रंथ लिहिला) तेव्हां कृत, त्रेता व द्वापार हीं तीन युगें उलटून जाऊन वर ६० × ६० = ३६०० वर्षें झालीं आहेत आणि माझ्या जन्मापासून तेवीस वर्षे उलटून गेलीं आहेत. कलियुगाचा प्रारंभ इ. स. पूर्वी सुमारें ३२०१ वर्षें धरतात. त्या हिशेबानें आर्यभटानें आपला ग्रंथ इ. स. ४९९ म्हणजे शके ४२१ त लिहिला. तसेंच तो शके ३९८ त जन्मला असें दिसतें.

आर्यभट गंगानदीच्या कांठीं पाटलिपुत्र नगरींत जन्मला असें बहुतेक तज्ज्ञांचें मत आहे. त्यांचें बालपण व मोठेपणहि तेथेंच गेलें असावें असें वाटतें. आर्यभटाचा एक टीकाकार परमेश्वर म्हणतो कीं :

अश्मकजनपदजात आर्यभटाचार्य : (किन्तु) कुसुमपुरेऽभ्यर्जितं ज्ञानम् ।

म्हणजे आर्यभटाचा जन्म ' अश्मक ' नांवाच्या गांवीं झाला, पण त्याचें शिक्षण मात्र कुसुमपुरांत म्हणजे पाटण्यांत झालें. एकंदरींत असें दिसतें कीं, आर्यभट हा बिहारी ब्राह्मण होता; पण ही गोष्ट केरळ प्रांतीय म्हणजे त्रावणकोरी लोक कबूल करीत नाहींत. त्यांच्या मतें आर्यभट केरळ प्रांतांत जन्मला व विद्यार्थिदशेंत तो ज्ञानसंपादन करण्यासाठीं पाटण्यास गेला. पाटणा ही त्या काळीं गुप्त वंशाची राजधानी असून त्या ठिकाणीं निरनिराळ्या विद्या व कला यांचा अभ्यास होत असे. ज्याप्रमाणें जगांतील विद्यार्जनप्रेरित तरुणांचीं आज लंडन, पॅरिस, बर्लिन, न्यूयॉर्क हीं ज्ञानक्षेत्रें आहेत तद्वतच त्या काळीं काशी, कनोज, पाटणा हीं ज्ञानक्षेत्रें होतीं. अर्थात् निरनिराळ्या प्रांतांतले ज्ञानेच्छु अशा ठिकाणीं गोळा होत असल्यास नवल नाहीं. त्यामुळें केरळीय लोकांचें मतहि बरोबर असण्याचा बराच संभव आहे. आर्यभटीयावर ज्या टीका आहेत त्यांत बऱ्याचशा मल्याळी भाषेंत आहेत, निदान त्या दाक्षिणात्यांच्या आहेत असें सांबशिव शास्त्री म्हणतात. प्रांताभिनिवेश टाकून आपण असें म्हणूं शकूं कीं, आर्यभट हा भारतीय होता व त्याची योग्यता इतकी मोठी होती कीं, प्रत्येक प्रांतास तो आपलासा वाटे.

आर्यभटीय हें काय आहे ?

आर्यभटानें लिहिलेला छोटेखानी पण अत्यंत महत्त्वाचा ग्रंथ ' आर्यभटीय ' हा होय. ' आर्यभटीय ' हें नांव त्यास आर्यभटानेंच दिलें आहे. आर्यभटाचे शिष्य लल्ल, वराहमिहिर वगैरे त्यास आर्यसिद्धांत असें म्हणतात. या पुस्तकाचे मुख्यतः दोन भाग आहेत. त्यांतला पहिला भाग ' दशगीतिका ' हा आहे व दुसरा भाग ' आर्याष्टाशत ' या नांवानें प्रसिद्ध आहे. कै. शं. बा. दीक्षित म्हणतात कीं, आर्यभटीयाशिवाय आणखी कांहीं तंत्रग्रंथ आर्यभटानें लिहिले असावेत. त्या ग्रंथाचें नांव ' आर्यतंत्र ' असें असावें असा कोलब्रुक व दीक्षित यांचा समज आहे. पण या पुस्तकाचें जुनें अगर नवीन हस्तलिखित कोणाच्याच पाहाण्यांत नाहीं.

यांतील दशगीतिकेच्या भागांत १३ श्लोक आहेत. त्यांतले तीन प्रार्थनेचे असून उरलेल्या १० श्लोकांत ग्रहभगण संख्या वगैरे ज्योतिषासंबंधीं कांहीं माहिती आलेली आहे. दुसऱ्या भागांत तीन पोटभाग असून त्यांना गणितपाद, कालक्रियापाद व गोलपाद अशीं नांवें आहेत. यांतील कालक्रियापाद व गोलपाद हे विभाग ग्रहगति व कालमापन यांच्याशीं संबंधित असल्यानें सामान्य वाचकांस त्यांतला फारच थोडा भाग समजेल. पण गणितपादांत अंकगणित व बीजगणित यांचाच विचार असल्यानें त्यांत आपली प्रगति केवढी झालेली होती हें वाचकांस आम्ही पुढें सांगणार आहों. तो भाग सोपा असून संस्कृत जाणणाऱ्यास स्वतःच समजेल. पण इतरांसाठीं आम्हीं त्यांतलीं उदाहरणें पुढें दिलीं आहेत. गणितपादांत ३३, कालक्रियेंत २५ व गोलपादांत ५० श्लोक आहेत. हे सर्व आर्यावृत्तांत रचलेले आहेत. आपल्या नांवाशीं निगडीत असलेल्या वृत्तांतच सर्व श्लोक रचणें हा कलेचा भाग समजला तर आर्यभट काव्यकलेंतही तरबेज होता ही गोष्ट ओघानेंच सिद्ध होते. आर्यभटाचा एक टीकाकार नीळकंठ म्हणतो कीं, आर्यभटानें ज्या वेळेस आपला ग्रंथ लिहिला त्यावेळीं ज्योतिःशास्त्र व दृक्प्रत्यय यांचा मुळींच मेळ बसत नसे. एकंदर या विषयाच्या ज्ञानांत इतकी बजबजपुरी

माजली होती कीं, स्वतः आर्यभटानें भगवान् स्वायंभुव मनूची प्रार्थना करून तपस्येनें त्यास संतुष्ट केलें व त्याच्याकडून गणित व ज्योतिष हीं शास्त्रें शिकून तीं लोकांत पुन्हां रूढ केलीं. एके ठिकाणीं तर नीळकंठानें आर्यभटास सूर्याचा अवतारच ¶ म्हटलें आहे. ही अतिशयोक्ति असली तरी आर्यभट हा भारतीय गणित्यांतला पहिला लेखक म्हणून महत्त्वाचा गणला जाणारच.

गणितपादांत कोणत्या गोष्टी आहेत ?

वर सांगितलेंच आहे कीं, गणितपादांत एकंदर ३३ श्लोक आहेत. त्यांत संख्यालेखन, बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार, वर्ग, घन, वर्गमूळ, घनमूळ, त्रिकोण, चौकोन व वर्तुळें यांचे कांहीं गुणधर्म, गणित श्रेढि, वर्ग श्रेढि, भुज-ज्यागणन व द्विवर्ण समीकरणें (पूर्णांक उत्तरें) इतके भाग आहेत. आजच्या शालेय व शालोत्तर अभ्यासक्रमाच्या दृष्टीनें पाहिल्यास यांत मराठी चौथीपासून तों आजच्या बी. ए. च्या अभ्यासक्रमांत शिकविले जाणारे कांहीं विषय देखील अंतर्भूत होतात. केवळ ३३ श्लोकांत एवढें ज्ञान दाबून भरण्याला कारणही तसेंच जबरदस्त असलें पाहिजे. भारतीय गणितावर पाश्चात्य लोकांची जी प्रतिकूल टीका होते तिचा एक मुद्दा असा आहे कीं, आमचे प्राचीन गणिती आपला विषय त्रोटक सूत्ररूपानें सांगतात. त्यामुळें ग्रंथांतील केवळ सूत्रांवरून लेखकांस नक्की काय म्हणावयाचें आहे तें समजत नाहीं. पुष्कळशा ग्रंथांवरील टीका वाचून देखील ग्रंथकाराचें लिखाण समजत नाहीं. हा आरोप पुष्कळसा खरा आहे. पण ज्या कालांत गणितपाद लिहिला गेला तेव्हां सर्वच ज्ञान गुरुमुखांतून श्लोकबद्ध रूपांत मिळविणें हीच सोय विद्यार्थ्यांना उपलब्ध होती. शिवाय छापखान्याचा शोध लागला नव्हता. पोथ्यांच्या हस्तलिखित प्रति विद्यार्थीच करून घेत, व श्लोक समजावून देतांना अनुरूप टीका व उदाहरणें गुरु देत असत. यामुळें ग्रंथ सूत्ररूपानें असला तरी त्या काळीं कांहीं बिघडत नसे.

¶ सिद्धांतपंचकाविधावपि दृग्विरुद्धं । औण्योपरागमुखखेचरचारक्लृप्तौ ॥
सूर्यः स्वयं कुसुमपुर्यभवत् कलौ तु । भूगोलवित् कुलप आर्यभटाभिधानः

आर्यभटाची संख्यालेखनपद्धति :

आज जगांतल्या सर्व देशांत अंकलेखनाची जी पद्धत चालू आहे तिला दशमानपद्धति असें म्हणतात. हिच्यांत स्थानपरत्वें अंकांची किंमत बदलते व उजवीकडून डावीकडे जीं स्थानें असतात त्यांची किंमत दसपटीनें वाढत जाते, हें सर्व वाचकांना हें ठाऊक आहेच. आर्यभटाच्या पूर्वीपासून हिंदुस्थानांत ही पद्धत रूढ असली पाहिजे. आर्यभटानें एका सूत्रांत सर्व संख्या क्रमाक्रमानें स्थानपरत्वें दसपट होतात असें सांगितलें आहे. $ वाचकांच्या दृष्टीनें आज या पद्धतींत नावीन्य नाहीं. पण आर्यभटानें दुसरीही एक संख्यालेखनाची पद्धत सांगितली आहे. नवीन कल्पना या दृष्टीनें ती फारच मजेदार आहे. ज्याप्रमाणें मिताक्षरी || भाषेंत एका अक्षराबद्दल दुसरें अक्षर घालतात पण स्वर तेच कायम ठेवून एक नवीन भाषा तयार होते तसेंच इथेंही पण झालें आहे. फक्त या ठिकाणीं विशिष्ट अक्षरांना ठरीव किंमती देऊन व स्वरांना ठरीव स्थानें देऊन सर्व संख्या अक्षरलिपींत लिहिण्याची सोय केलेली आहे. आर्यभटाचें सूत्र असें आहे :

> वर्गाक्षराणि वर्गेऽवर्गेऽवर्गाक्षराणि कात् ङ्मौ यः ।
> खद्विनवके स्वरा नव वर्गेऽवर्गे नवान्त्यवर्गे वा ॥

अर्थ : एकं, शतं, दशसहस्र, दशलक्ष, दशकोटि वगैरे स्थानें हीं वर्ग-स्थानें समजावीं व त्या ठिकाणीं क, ख, ग,......पासून प, फ, ब, भ, मपर्यंत अक्षरें म्हणजे क, च, ट, त, प, वर्गांतलीं अक्षरेंच घालावीं. या अक्षरांच्या किंमती क = १, ख = २,...ते म = २५ पर्यंत समजाव्या.

दशं, सहस्र, लक्ष, कोटि...हीं अवर्ग स्थानें समजावीं. या ठिकाणीं य व र ल पासून ह पर्यंत अक्षरें (ह्यांना अवर्ग अक्षरें म्हणतात) घालावीं. त्यांच्या किंमती ३ पासून १० पर्यंत समजाव्या. अ, इ, उ, ऋ, लृ, ए,

---

$. एकं दश च शतं च सहस्रमयुतनियुते तथा प्रयुतम् ।
कोट्यर्बुदं च वृन्दं स्थानात्स्थानं दशगुणं स्यात् ॥ गणितपाद २

|| अकौ खगौ घङश्चैव चटौ तपौ परस्परम् ।
यशौ रसौ लषश्चैव हवाळाक्षा मिताक्षरी ॥

ऐ, ओ, औ हे स्वर अनुक्रमें १, १००, १००००, याप्रमाणें शतपटीनें वाढत जाणाऱ्या किंमती दर्शवितात. वर्ग व्यंजनांना हे स्वर (ऱ्हस्व किंवा दीर्घ) जोडल्यास जीं अक्षरें होतील त्याच्या १, १००,...वगैरे प्रमाणांत संख्या तयार होतील व अवर्ग अक्षरापुढें तींच अक्षरें जोडल्यास अनुक्रमें १०, १०००, १०००००....वगैरे पटी व्यक्त करणारीं अक्षरें तयार होतील. उदाहरणार्थ ग् हें वर्ग व्यंजन आहे व तिसरें आहे. म्हणून ग् = ३. त्यांत अ हा स्वर मिळवून ग = ३. पण गि = ३००, गु, गू = ३००००, गृ = ३०००००० (तीस लक्ष) अशा संख्या दाखविल्या जातात. य हें अवर्ग व्यंजन आहे. याची किंमत ३. पण तें दश, दशसहस्र अशा स्थानींच येऊं शकतें. म्हणून य = ३०. यि = ३०००, यु = ३०००००, अशा किंमती होतात. आर्यभटमताप्रमाणें एका कल्पांतील चार युगांत मिळून ४३२०००० वर्षें होतात. ही संख्या आर्यभटीय पद्धतीनें कशी दाखवाल? तर घ = ४, घृ = ४०००००० (चाळीस लक्ष), यापुढचें स्थान लक्षांचें. तें अवर्ग आहे. म्हणून य = ३, यु = ३०००००. यापुढचें स्थान दशसहस्रांचें. तें वर्ग-स्थान आहे. म्हणून ख = २, खु = २०००००. म्हणून ही संख्या खुयुघृ = ४३२०००० अशी दाखविली. वाचकांच्या लक्षांत येईलच कीं, संस्कृतमध्यें संख्या उजवीकडून डावीकडे वाचतात. म्हणून घृयुखु न लिहितां खुयुघृ लिहिलें. अर्थात् आर्यभट यांतही काटकसर करतो. म्हणजे जर दोन लागोपाठच्या अक्षरांना एकच स्वर लागलेला असेल तर तो स्वर एकदांच लिहून व्यंजनांचें तो जोडाक्षर बनवितो. म्हणून ख्युघृ = ४३२००००. या पद्धतीनें अगदीं परार्धापर्यंतची संख्या पांच सात अक्षरांत लिहितां येईल. उदाहरणार्थ, गुरूचा युगभगण खिच्युभ : इतका आहे. म्हणजे तो ३६२२२४ इतका आहे. कारण च्यु = ३६००००, खि = २२००, भ = २४ म्हणून ३६२२२४ इतकी संख्या झाली. यांत एक फायदा असा आहे कीं, यांतल्या अक्षरांची उलटापालट करून तो शब्द लिहिला तरी किंमत बदलत नाहीं. ग्रहगणितांत लागणारे

मोठमोठे हिशेब कवितारूपानें लिहितांना वृत्तनियमांत या संख्या बसाव्या म्हणून ही सोय आहे. आपणांसही असे कांहीं आंकडे सांगतां येतील. उदाहरणार्थ,भारतास स्वातंत्र्य कोणत्या सालीं मिळालें ? तर १९४७ सालीं. येथें छ = ७, र = ४०, झि = ९००, पण नुसते १००० व्यक्त करतां येत नाहींत. म्हणून धि = १९००. म्हणून १९४७ = छृधिः. करमणुकीसाठीं आर्यभटाच्या या पद्धतींत आपणही पुष्कळ संख्या लिहूं शकाल. या पद्धतीचे अर्थात् कांहीं दोषही आहेत. कारण संख्या जोडाक्षररूपानें लिहिल्या म्हणजे त्या शब्दांचे उच्चार करणें कठीणच होणार. हा एक दोष व दुसरा दोष असा कीं, तींच तींच अक्षरें अवघडपणें कवितेंत आल्यानें कवितेंत लालित्य राहात नाहीं. शिवाय या अक्षरलिपींत संख्या लिहितां आल्या तरी संख्यालेखनाचा जो मूळ उद्देश गुणाकार, भागाकार वगैरे क्रिया करणें तो या लिपींत मुळींच साध्य होत नाहीं. ग्रीक लोकही प्राचीन काळीं अक्षर लिपींत संख्या दाखवीत. पण त्यांना देखील बेरीज, वजाबाकी इत्यादि करण्यास अशाच अडचणी येऊं लागल्या. त्यामुळें हिंदूंचीं अंकचिन्हें व दशमानपद्धति त्यांनाही उचलावी लागली. अक्षरांनीं संख्या दर्शविण्याच्या निरनिराळ्या पद्धति आर्यभटकाळीं प्रचलित होत्या. त्यांना कटपयादि असें म्हणतात. यांत क, ट, प, य हीं अक्षरें १ आंकडा; ख, ठ, फ, र हीं २; ग, ड, ब, ल ३, घ, ढ, भ, व ४; ङ, ण, म, श ५; च, त, ष ६; छ, थ, स ७; ज, द, ह ८; छ, ध, ९ व ञ, न ० दाखवितात. स्वरांना कांहींच किंमत नाहीं; ते फक्त उच्चारासाठीं व्यंजनांना जोडायचे. फक्त संख्या वाचतांना उलट वाचायच्या; कारण ‘ अंकानां वामतो गतिः ’. उदाहरणार्थ,

राघवाय = १४४२, भवति = ६४४, तत्त्वलोके = १३४६ यांत जोडाक्षरत्त्व आलेलें आहे त्यांतल्या फक्त वलाच किंमत असून उरलेल्या भागांस कांहींच अर्थ नाहीं.

या कटपयादि पद्धतीचे चार प्रकार सुमारें सहाव्या शतकापर्यंत प्रचलित होते; पण गणित करण्यास ते सुलभ नसल्यामुळें लवकरच मागे पडले.

वर्गमूळ काढण्याची आर्यभटाची रीत :

अंकगणितांत आपण हल्लीं वर्गमूळ काढण्यासाठीं जी रीत वापरतों ती थोड्या फार फरकानें आर्यभटाच्या रीतीची सुधारून वाढविलेली आवृत्ति आहे. स्वतः आर्यभटाची रीत पुढें दिली आहे.$ उदाहरणार्थ, समजा आपणांस १५१२९ या संख्येचें वर्गमूळ काढावयाचें आहे तर आर्यभटाच्या रीतीप्रमाणें असा भागाकार होईल.

```
      . — . — .
    ) १ ५ १ २ ९  ( १
      १
     ———
  २) ० ५          ( २ ... १२
        ४
       ———
       १ १
         ४
       ———
  २४ ) ७ २     ( ३ .... १२३
         ७ २
        ———
         ००९
         ००९
        ————
         ०००
```

रीत:—दिलेल्या संख्येंत १, १, ९ हीं वर्गस्थानें आहेत. ५, २ हीं अवर्गस्थानें आहेत. वर्गस्थानें टिंबांनीं व अवर्गस्थानें रेघांनीं दाखवावीं. नंतर वर्गस्थानाच्या आंकड्यांतून जो वर्ग वजा जाईल तो वजा करावा. त्यांतून राहिलेल्या बाकीवर पुढचा अवर्ग आंकडा घ्यावा. हा भाज्य तयार झाला. त्याला पहिल्या वर्गमुळाच्या दुपटीनें भागावें. राहिलेल्या बाकीवर पुढील टिंबांकित आंकडा

$ भागं हरेदवर्गात् नित्यं द्विगुणेन वर्गमूलेन ।
वर्गात् वर्गे शुद्धे लब्धं स्थानान्तरं मूलं ॥ गणितपाद ४.

घेऊन नवीन भाज्य तयार करावा. मागें लागलेल्या भागाचा वर्ग यांतून वजा करावा. याप्रमाणें वर्गस्थानच्या भाज्यांतून वर्ग वजा करावा व अवर्ग स्थानच्या भाज्यास पूर्ववर्गाच्या दुपटीनें भाजक समजून भागावें. याप्रमाणें एकं स्थान संपेपर्यंत करावें. संख्या पूर्ण वर्ग असल्यास बाकी शून्य राहील. समजुतीसाठीं आर्यभटाच्या व हल्लींच्या अशा दोन्ही रीतींनीं ५३८७५६ या संख्येचें वर्गमूळ काढून दाखविलें आहे.

नवी रीत

```
       .  .  .
 ७ ) ५३८७५६ ( ७३४
 ७    ४९
----  ----
१४३   ४८७
  ३   ४२९
----  -----
१४६४  ५८५६
      ५८५६
      -----
      ००००
```

आर्यभटाची रीत

```
     - . - . - .
 ७ ) ५ ३ ८ ७ ५ ६ ( ७
     ४९
     ----
 १४ ) ४८        ( ३   ( ७३ )
      ४२
     -----
      ६७
       ९
     -----
 १४६ ) ५८५ ( ४ ( ४  ( ७३४ )
       ५८४
      -----
        १६
        १६
       ----
        ००
```

या दोन्ही रीतींच्या मुळाशीं $(\text{अ} + \text{ब})^2 = \text{अ}^2 + २\ \text{अब} + \text{ब}^2$ हाच सिद्धांत आहे. नवीन रीतींत अ^2 वजा केल्यानंतर $२\ \text{अब} + \text{ब}^2$ एकदम वजा होतात. तर आर्यभट पायरीपायरीनें २ अब व ब^2 वजा करतो.

आर्यभटाची घनमूळ काढण्याची पद्धतही याच तऱ्हेची आहे.पण वर्गमुळांत आपली नवी पद्धत सोइस्कर असली तरी घनमूळांत नाहीं. घनमुळासाठीं आर्यभटाचीच पद्धति जास्त सोपी आहे. एक उदाहरण पुढें दिलें आहे यावरून रीत स्पष्ट होईल.

उदा० १४३४८९०७ या संख्येचें घनमूळ काढा.

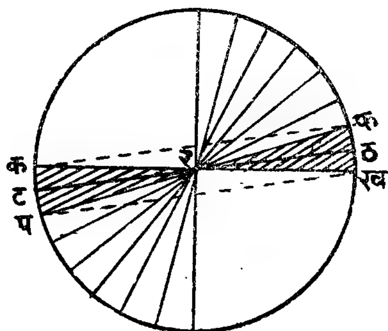
२) १४३४८९०७ (२ ... भाजक १२ = $२^{२}$ × ३.
८
———
१२) ६३ (४ ... वास्तविक ५ चा भाग लागतो, पण नंतर ३४ मधून २५ × ६ ची पट वजा जाणार नाहीं म्हणून ४ चा भाग.
४८
———
१५४
९६ ... $४^{२}$ × २ × ३ (भागाकारांतील दुसऱ्या अंकांचा वर्ग × पहिला अंक × ३)
———
५८८
६४ .... दुसऱ्या भागाकाराचा घन वजा
———
१७२८) ५२४९ (३ भाजक $२४^{२}$ × ३
५१८४
———
६५० ... $३^{२}$ × २४ × ३ इतके वजा
६४८
———
२७
२७ ... वजा $३^{३}$.
———
००

त्रिकोणाचें व वर्तुळाचें क्षेत्रफळ :

आर्यभटानें त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाचें सूत्र असें सांगितलें आहे :

त्रिभुजस्य फलशरीरं समदलकोटी भुजार्धसंवर्गः ।

म्हणजे त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ हें त्याचा पाया व उंची याच्या गुणाकाराच्या निमपट असतें. आर्यभटास पायथ्यागोरसचा सिद्धांत माहीत होता. तो म्हणतो—यश्चैव भुजावर्गः कोटीवर्गश्च कर्णवर्गश्च सः । तद्योगमूलं कर्णः । अर्थात् पायथ्यागोरसचा सिद्धांत असें आपण ज्यास म्हणतों तो शुल्वसूत्रांत पूर्वींच होता. म्हणून आर्यभटानें तो ग्रीकांकडून उसना घेतला असें होत नाहीं. आर्यभटानें वर्तुळाचें क्षेत्रफळ कसें काढलें ?···शालेय भूमितीच्या सर्व पुस्तकांतून वर्तुळाचें क्षेत्रफळ काढून दाखविण्यासाठीं निरनिराळ्या कल्पना योजलेल्या आढळतात. पण या सर्वांत मुलांना सहज समजणारी रीत आर्यभटानेंच दिलेली आढळते. तिचें स्पष्टीकरण पुढील आकृतीवरून कळून येईल. समजा र हें एका वर्तुळाचें केंद्र आहे व पफ, कख हे त्याचे व्यास आहेत. जर कपकंसानें र पाशीं लहान कोन केला असेल तर कप हें एक सरळरेषाखंड होईल. म्हणजेच कपर हा त्रिकोण होईल. खफर हाही त्रिकोण तेवढ्याच क्षेत्राचा होईल. आतां कपखफ ह्या चौकोनाच्या अर्ध्या-



एवढें क्षेत्रफळ वर सांगितलेल्या दोन त्रिकोणांचें मिळून होईल. म्हणजेच आकृतींतल्या गर्द भागाचें क्षेत्रफळ $\frac{\text{कप} \times \text{टठ}}{२}$ इतकें झालें. आतां सर्व वर्तुळ अशा रीतीनें विभागतां येईल कीं, त्यांत छायाश्रित भागासारखे

अनेक भाग शेजारीं येतील. या भागांची संख्या जितकी मोठी तितका त्यचा सरळपणा जास्त होईल, टठ तितकाच व्यासाला जवळ येईल. म्हणून वर्तुळाचें क्षेत्रफळ $\frac{टठ}{२}$ $\frac{(परिघ)}{२}$ म्हणजेच $\frac{व्यास}{२} \times \pi \times \frac{व्यास}{२} = \pi \times त्रि.^{२}$

विद्यार्थ्यांची समजूत पडण्यासाठीं शिक्षकांनीं वर्गांत या रीतीचा अवलंब करावा इतकी महत्त्वाची ही रीत आहे.

वर्तुळाच्या व्यासपरिघांचें गुणोत्तर π या अक्षरानें दर्शवितात. त्याची किंमत पूर्णपणें व्यक्त करतां येत नाहीं. परंतु अंदाजी किंमत ३·१४१६ किंवा $\frac{२२}{७}$ असते असें आपण धरतों. आर्यभट त्याची किंमत $\frac{६२८३२}{२००००}$ इतकी देतो. म्हणजे तो देखील ३·१४१६ हीच किंमत देतो. यावरून 'पाय्'ची किंमत त्याला नीटपणें ठाऊक होती असें दिसतें. भास्कराचार्यालासुद्धां व्यास परिधि गुणोत्तराची किंमत योग्य प्रकारें ज्ञात होती. पण पेशवेकालीन कागदपत्रांत कांहीं ठिकाणीं π = ३ अशी किंमत वापरलेली प्रस्तुत लेखकाच्या पाहाण्यांत आली. धुळें येथील राजवाडे संशोधन मंदिरांत किल्लाबांधणीसंबंधाचे पेशवेकालीन कांहीं कागदपत्र लेखकाच्या पाहाण्यांत आले. त्यांत π = ३ धरून बुरुजाचें घनफळ काढण्यांत आलें होतें. हे कागद इ. स. १७४० च्या सुमाराचे असावेत. इंग्रज हिंदुस्थानांत येऊं लागल्याला या वेळीं सुमारें १२५ वर्षें झालीं होतीं. तथापि आमचे त्यावेळचे इंजिनियर जुन्या गणिताशीं तसेंच नवीन युरोपीय शास्त्राशीं कसे अनभ्यस्त होते हें पाहून आश्चर्य वाटतें व वाईटही वाटतें.

आर्यभट गोलाचें घनफळ कसें काढतो ?

यानंतर आर्यभटानें गोलाचें घनफळ काढण्याचें सूत्र दिलें आहे. तो म्हणतो : ज्या गोलाचें घनफळ काढावयाचें असेल त्याच्या त्रिज्येनें जें वर्तुळ तयार होईल त्याच्या क्षेत्रफळास क्षेत्रफळाच्या वर्गमुळानें गुणावें म्हणजे

घनफळ मिळतें.¶ म्हणजे ७ त्रिज्येचा गोल असल्यास आर्यभटाच्या रीतीनें घनफळ $= \frac{२२}{७} \times ७^{२} \times \sqrt{\frac{२२}{७} \times ७^{२}}$ असें होतें. नवीन गणितांतल्या सूत्राप्रमाणें घनफळ $= \frac{४}{३} \pi$ त्रि.^{३} व आर्यभटाप्रमाणें घनफळ $= \sqrt{\pi . \pi .}$ त्रि.^{३} म्हणजेच आर्यभटाच्या पद्धतीनें येणारें घनफळ हें खऱ्या किंमतीच्या $\frac{१७७}{१३३}$ पट जास्त आहे. अर्थात् आर्यभटाचें सूत्र चुकीचें आहे. त्याच्या-सारख्या विद्वान् गणित्याला हें सूत्र चुकीचें कां मिळालें याची कारणमीमांसा करतां येईल; पण तो प्रस्तुत पुस्तकाचा विषय नाहीं.

गणितपादांत गणितश्रेढीचें सूत्र, वर्गचिति, घनचिति म्हणजे
१ + २ + ३ + ४ + ...ही पदावलि किंवा
$१^{२} + २^{२} + ३^{२} + ४^{२} + \ldots$,, किंवा
$१^{३} + २^{३} + ३^{३} + ४^{३} + \ldots$,, यांची इष्ट पदांपर्यंत
बेरीज करण्याच्या सारण्या आर्यभटानें दिल्या आहेत. पण शाळकरी विद्यार्थ्यांना त्या शिकविल्या जात नाहींत म्हणून त्याचा नुसता उल्लेख करून आपण पुढें जाऊं.

आर्यभटाचें भुजज्यांचें कोष्टक (Sine-table) ही एक भारतीय गणितां-तली अत्यंत महत्त्वाची घटना समजली जाते. लोकांच्या उपयोगासाठीं तयार कोष्टकें (ready-made) छापवून गरजूंना देणें हा प्रकार साधारणतः सतराव्या शतकांत पाश्चिमात्य देशांत रूढ झाला असावा असें वाटतें. तत्पूर्वी गणित शिकणाऱ्या विद्यार्थ्यांच्या सोयीसाठीं अशा प्रकारचें कोष्टक तयार करणारा आर्यभट हा पहिलाच लेखक म्हटला तरी चालेल. आर्यभटानें ० अंशापासून ते ९० अंशापर्यंत ३।।। अंशांच्या फरकानें सर्व कोन घेऊन त्यांचे ज्यार्ध (Sine) कसे काढावे याचा नियम दिला आहे. त्यांत ९० अंशाची भुजज्या जी १ त्याची किंमत ३४३८ धरून त्या प्रमाणांत ३।।।°, ७।।°, ११।°,

¶ समपरिणाहस्यार्धं विष्कम्भार्धहतमेव वृत्तफलम् ।
तन्निजमूलेन हतं घनगोलफलं निरवशेषम् ॥

१५°,...याप्रमाणें ९० अंशापर्यंतच्या कोनांच्या भुजज्या २२५, २२५+२२४, २२५ + २२४ + २२२ या प्रमाणांत असतात असें दाखविलें आहे. आर्यभटाचा नियम खालीं दिला आहे. पण त्याचें स्पष्टीकरण वाचकांस समजण्यास कठीण जाईल म्हणून देत नाहीं. $ गणितशास्त्राचा इतिहास लिहिणाऱ्या पाश्चात्य लेखकांच्या मतें आर्यभटानें हें कोष्टक टॉलमीच्या कोष्टकांवरून घेतलें आहे. पण टॉलमीच्या कोष्टकांत काटकोनाचे ६० भाग धरून चाप घेतलेले आहेत तर आर्यभटानें काटकोनाचे ३४३८ भाग कल्पून अर्धज्या काढल्या आहेत. शिवाय टॉलमीपासून आर्यभटानें दुसरें कांहींच उसनें घेतल्याचा पुरावा नाहीं. तेव्हां केवळ भुजज्या उसन्या घेतल्या असतील हें संभवत नाहीं. या विषयासंबंधींचा पाश्चात्य लेखकांचा कल लक्षांत घेतां भारतीय गणित्यांनीं जे जे नवीन शोध लावले ते ग्रीकांच्याकडून उसने घेतले असें म्हणण्याची त्यांना संवय लागली आहे कीं काय असें वाटूं लागतें. याविषयीं उपोद्घातांत लिहिलें असल्यानें तो मुद्दा या ठिकाणीं पुन्हां स्पष्ट करीत नाहीं.

आर्यभटानें गणितपादाच्या शेवटीं आणखी एक विषय दिला आहे. सामान्यतः यास कुट्टक असें म्हणण्याचा प्रघात आहे. त्यांत खालीं दिलेल्या प्रकारचे प्रश्न सोडून दाखविण्याची रीत दिली आहे. इंग्रजींत या विषयाला 'डायोफंटसचें समीकरण' असें नांव आहे. याचें एक उदाहरण सांगितलें तर तें वाचकांना समजण्यासारखें आहे.

प्रश्न—अशी एक पूर्णांक संख्या शोधून काढा, कीं जिच्या आठपटीस २९ नें भागलें असतां बाकी ४ राहते व जिच्या १७ पटीस ४५ नें भागलें असतां बाकी ७ राहाते. आर्यभटाची रीत पुढें स्पष्ट केली आहे. येथें हें सांगितलें पाहिजे कीं, ज्या प्रश्नांस आर्यभट, महावीर, लल्ल वगैरे कुट्टक किंवा कुट्टिकार असें नांव देतात त्यांना अंकगणित व बीज-

$ प्रथमाच्चापज्यार्धात् यैरूनं खण्डितं द्वितीयार्धम् ।
तत्प्रथमज्यार्धांशैस्तैस्तैरूनानि शेषाणि ॥

गणित अशा दोन्ही प्रकारच्या उत्तर काढण्याच्या रीति आहेत. अर्थात् बीजगणिताची रीत पायाभूत असते व अंकगणिताची रीत ही त्याजवर बसविलेली प्रत्यक्ष रीत असते. सामान्य वाचकांना ही रीत समजण्यासारखी आहे. ती पुढें दिली आहे. आर्यभटाच्या परिभाषेंत ८ हा गुणक, ४ क्षेपक, २९ भाजक. तसेंच दुसऱ्या भागांत १७ गुणक, ७ क्षेपक व ४५ भाजक आहे. आतां ८ व २९ यांचा दृढभाजक काढा. नंतर असा एक

```
८ ) २९ ( ३
    २४
    ——
     ५ ) ८ ( १
         ५
         ——
         ३ ) ५ ( १
             ३
             ——
             २ ) ३ ( १
                 २
                 ——
                 १
```

सोइस्कर अंक घ्या, कीं त्याला शेवटची बाकी १ नें गुणून क्षेपक ४ मिळवला म्हणजे येणाऱ्या बेरजेस शेवटचा भाजक २ यानें पूर्ण भाग जाईल. किंवा क्षेपक ४ वजा करून २ नें भागलें तरी पूर्ण भाग जाईल. असा ६ हा अंक घेऊं या. मग $\frac{६ - ४}{२} = १$. हा जो १ भागाकार आला हा वल्लीचा (वल्लि — उभी ओळ) अंत्य अंक झाला. हा १ सर्वांत खालीं, त्याच्यावर सोइस्कर अंक ६ व त्याच्यावर पायरीपायरीनें दृढभाजकांतले (खालून वर) असलेले भागाकार अशी वल्लि तयार करा. ही वल्लि खालच्या आकृतींत रेघेच्या डाव्या बाजूस लिहिली आहे. आतां

वल्लि	उपवल्लि
३	→ ७३
१	→ २०
१	→ १३
१	→ ७
६	
१	

आपल्या सोइस्कर अंकानें (६ नें) त्याच्या वरच्या एकास गुणून त्यांत खालचा अंत्य १ मिळवून येणारी बेरीज ७ ही ६ च्या डोक्यावरचा जो एक त्याच्या समोर रेघेच्या उजवीकडे लिहा. नंतर ७ नें खालून ४ था जो १ आहे त्यास गुणून त्यांत ६ मिळवा व ते १३ १ च्या समोर ७ च्या डोक्यावर लिहा. नंतर १३ च्या डोक्यावर २० लिहा.

२० च्या डोक्यावर २० × ३ + १३ = ७३ लिहा. आतां ७३ ला २९नें भागा. म्हणजे १५ बाकी राहिली. हिला **प्रथम क्षेपक** म्हणा.

प्रश्नाच्या दुसऱ्या भागाला हीच रीत लावा.

```
१७ ) ४५ ( २
     ३४
     ——
     ११ ) १७ ( १
          ११
          ——
           ६ ) ११ ( १
                ६
                ——
                ५ ) ६ ( १
                    ५
                    ——
                    १
```

सोइस्कर अंक ३ घ्या. क्षेपक ७.

$\frac{३ + ७}{५} = २$. म्हणून वल्लि व उपवल्लि पुढें दिल्याप्रमाणें होतात.

च.		उ. व.
२	→	३४
१	→	१३
१	→	८
१	→	५
३		
२		

आतां ३४ ला ४५ नें भागा. म्हणजे बाकी ३४ राहिली. हिला द्वितीय क्षेपक म्हणूं या. पण याऐवजीं ४५ ला ३४ नें भागलें तरी चालेल. म्हणून ४५−३४ = ११ हा सोपा होईल. म्हणून **११** हा द्वितीय क्षेपक झाला.

आतां १५ व ११ यांना अग्रें असें पण म्हणतात.

यांतला फरक ४ हा तृतीय क्षेपक. २९ व ४५ यांच्या दृढभाजकांस हा तृतीय क्षेपक घेऊन पुन्हां वल्लि तयार करा.

२९) ४५ (१
     २९
    ——
    १६) २९ (१
         १६
        ——
        १३) १६ (१
             १३
            ——
             ३) १३ (४
                १२
               ——
                 १

व.	उ. व.
१ →	३४
१ →	२२
१ →	१२
४ →	१०
२	
२	

येथें समजा २ सोइस्कर संख्या घेतली तर

$$\frac{२ + \text{क्षेपक } ४}{३} = २.$$

म्हणून खालीं दाखविल्याप्रमाणें तिसरी वल्लि तयार झाली. या वल्लीचा उच्चांक ३४ याला २९ नें गुणा व त्यांत प्रथम क्षेपक १५ मिळवा. म्हणजे ३४ × २९ + १५ = १००१ ही संख्या आली. कदाचित् आमचे सोइस्कर अंक जरी निराळे घेतले तरी आमचे प्रथम, द्वितीय व तृतीय क्षेपक हेच येतील. म्हणून कमींत कमी उत्तर १००१. यापेक्षां मोठीं उत्तरें अर्थातच संभवतात.

अशा प्रश्नांना कुट्टकें असें म्हणतात. आपला कोडीं हा शब्द कुट्टक शब्दावरूनच निघालेला आहे. अशीं कुट्टकें सोडविणें हा त्या काळीं बुद्धीच्या कुशाग्रतेचा मोठा पुरावा मानला जाई. गर्व करणाऱ्या गणकबटूंना त्यांचा वृथाभिमान नष्ट व्हावा म्हणून त्यांचे गुरु नेहमीं असले अवघड प्रश्न विचारीत. हल्लीं जर का कोणीं शिक्षकानें विद्यार्थ्यांना असा उपदव्यापी प्रश्न विचारला तर शिक्षकाचीच उचलबांगडी शाळेच्या बाहेर होण्याचा संभव अधिक !

आर्यभटास बीजगणिताचे आणखीहि विशेष ठाऊक होते. उदाहरणार्थ, $अ \times ब = \frac{(अ + ब)^2 - (अ^2 + ब^2)}{२}$ हें अभेदसमीकरण ¶ आर्यभटास माहीत होतें. वर्गसमीकरणाची $ मूळें काढण्याचें सूत्र देखील त्याला ठाऊक होतें.

इष्टकर्म :

जुन्या अंकगणितांतील एक महत्त्वाची रीत इष्टकर्म किंवा इष्टराशिक || या नांवानें प्रसिद्ध आहे. कै. नामदार गोखले यांच्या अंकगणितात ही सुप्रसिद्ध रीत दिलेली आहे. या रीतीनें साधारणत: कुठलेंही उदाहरण सोडवितां येतें. ही रीत एक प्रकारें बीजगणिताचीच म्हणावयास हरकत नाहीं. पण बीजगणितांत जेथें आपण अ, ब अशीं अव्यक्तें वापरतों त्याऐवजीं यांत संख्याच घेतात. एक उदाहरण घेऊन ही गोष्ट स्पष्ट करूं.

एका माणसानें १०० गाई ५००० रुपयांस घेऊन त्यांतल्या कांहीं गाई ६० रुपयेप्रमाणें व उरलेल्या ८० रुपये गाईस याप्रमाणें विकल्या. तेव्हां त्यास १८०० रु. नफा झाला. तर पहिल्या व दुसऱ्या दरानें किती गाई विकल्या ?

इष्टकर्मानें ... समजा त्यानें ३० गाई ६० दरानें व ७० गाई ८० दरानें विकल्या. तर त्याला ३०×६०+७०×८०=१८००+५६०० =७४०० रुपये मिळतील. म्हणजेच २४०० रुपये नफा होईल; पण प्रत्यक्ष नफा १८०० च आहे. मग हा अलाहिदा ६०० रुपये नफा कां झाला ? तर दुसऱ्या दराच्या वास्तविक विकल्या होत्या त्यापेक्षां $\frac{६००}{२०}$ = ३० गाई त्या दरांत जास्त विकल्या गेल्या असें आपण समजलों म्हणून; अर्थात् दुसऱ्या दरानें ४० च विकल्या असल्या पाहिजेत व ∴ पहिल्या दराच्यां ६० गाई झाल्या.

¶ अभेद-समीकरण = Identity.

$ वर्गसमीकरण = Quadratic Equation.

|| इष्टराशिक—Rule of False Position or Regula Falsi.

बीजगणितानें ... समजा, पहिल्या प्रकारच्या क्ष व दुसऱ्या प्रकारच्या य गाई विकल्या; तर क्ष + य = १००, व ६० क्ष + ८० य = ६८००. सोडवून क्ष = ६० व य = ४०. या दोन्हींवरून इष्टकर्माच्या रीतीची कल्पना येईल. आर्यभट, ब्रह्मगुप्त व भास्कराचार्य ही रीत देतात. पण पुढें पुढें हिचा वापर अगदींच कमी झालेला आढळतो. कारण बीजगणितानें प्रश्न सोडवितां येऊं लागल्यावर अनमानधक्क्याची ही रीत मागें पडली तर नवल नाहीं.

आर्यभट अव्यक्त संख्येस गुलिका (गोळी) ही संज्ञा देतो. विद्यार्थ्यांना बीजगणित शिकवितांना तो निरनिराळ्या रंगांच्या गोळ्या वापरून उदाहरणें शिकवीत असे. म्हणून अव्यक्तांना तो वर्ण ही संज्ञा लावी. त्याच्यानंतर झालेल्या सर्व गणित्यांनीं अज्ञात संख्यांना कालिका, नीलिका, पीलिका असे शब्द वापरले आहेत त्याचें कारण हेंच असावें.

आर्यभटाची सूर्यमालेसंबंधीं कल्पना :

आर्यभट म्हणतो, या विश्वाच्या मध्यभागीं एकाद्या चेंडूसारखी पृथ्वी लोंबत आहे. ¶ तारामंडळाचें जें वर्तुळ आहे त्याच्या मध्याबिंदूजवळ पृथ्वी अवस्थित आहे. तिच्या सभोंवार ग्रहांच्या कक्षा आहेत. कदंबपुष्पांत ज्याप्रमाणें मध्यें एक गोल असून त्यास सर्व बाजूंनीं पुष्पतंतु चिकटलेले असतात तसेंच पृथ्वीच्या गोलास सर्व बाजूंनीं प्राणी चिकटलेले आहेत. आर्यभटास पृथ्वीचें दैनंदिन अक्षभ्रमण ठाऊक होतें. पृथ्वी आपल्या स्वतःभोंवतीं प्रदक्षिणा करीत असते, ती स्थिर नाहीं. ही कल्पना पाश्चात्यांना फार उशिरां आली; पण आर्यभटास भूभ्रमण चांगलेंच ठाऊक होतें. वेदकालापासून आपल्या देशांतील लोकांस असें वाटत होतें कीं, चंद्र, सूर्य, ग्रह व नक्षत्रें रोज पूर्वेस उगवून पश्चिमेस मावळतात. म्हणजेच हे सर्व गोल किंवा तेजोबिंदु या अनंत आकाशाचा प्रवास करून पृथ्वीभोंवतीं प्रदक्षिणा करतात. आर्यभटानें यावर जास्त विचार केला. तेव्हां त्यास दिसून आलें कीं, आकाशांतलीं सर्व नक्षत्रें, ग्रह वगैरे प्रत्यक्ष रोजच्या रोज पृथ्वीभोंवतीं

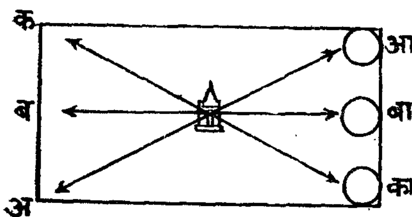
¶ वृत्तभपञ्जरमध्ये कक्ष्यापरिवेष्टितः खमध्यगतः मृज्जलशिखिवायुमयः भूगोलः सर्वतोवृतः ।

पिंगा घालीत नसून पृथ्वीच स्वतःभोंवतीं भोंवऱ्यासारखी गरगर फिरत आहे. व तारे पूर्वेकडून पश्चिमेकडे गेल्यासारखे वाटतात; त्याचें कारण पृथ्वी पश्चिमेकडून पूर्वेकडे फिरत आहे. सापेक्ष गतीमुळें हें होतें. हें स्पष्ट व्हावें म्हणून आर्यभट पुढील उदाहरण गोलपादांत देतो. तो म्हणतो—ज्याप्रमाणें होडींतून जाणाऱ्या इसमास नदीच्या कांठावरील झाडें मागें जात आहेत असें वाटतें, अगदीं तसेंच विषुववृत्तावरील माणसास नक्षत्रें मागे म्हणजे पूर्वेकडून पश्चिमेकडे जात आहेत असें वाटतें. हें स्पष्टीकरण इतकें खुलासेवार असूनही आर्यभटाचे टीकाकार परमेश्वर व भटोत्पल हे पृथ्वी स्थिर आहे असा यांतून अर्थ काढतात; पण तें चूक आहे.

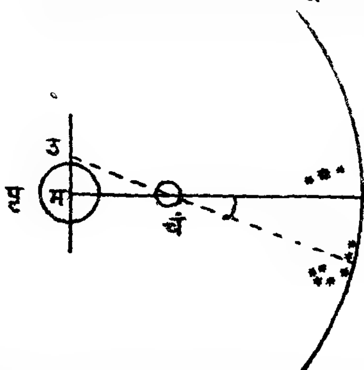
आश्चर्याची गोष्ट अशी कीं, स्वतः आर्यभट याच्या पुढच्याच श्लोकांत सांगतो कीं, खस्थ ज्योतींच्या उदयास्ताचें कारण असें आहे कीं, प्रवह वायूच्या जोरानें सर्व ग्रह, तारे, पूर्वेकडून पश्चिमेकडे जोरानें ढकलले जातात. म्हणजे या ठिकाणीं पृथ्वी स्थिर आहे असें मानण्याची आपत्ति आपणांवर आली. एकदां आर्यभट पृथ्वीला आंसाभोंवतीं भ्रमण आहे असें मानतो; तर दुसऱ्या ठिकाणीं पृथ्वी स्थिर आहे असें म्हणतो. यामुळें आर्यभटाचें खरें मत काय होतें याविषयीं त्याच्या टीकाकारांनाही संशय निर्माण झाला आहे. पण गोलपादांत ज्याअर्थीं पृथ्वीच्या दैनंदिन भ्रमणासंबंधीं आणखी उल्लेख आहेत, त्याअर्थीं आर्यभटास तें ठाऊक होतें यांत काडीमात्र संशय नाहीं.

दृग्भेद :

सोबत दिलेल्या आकृतींत दृग्भेद म्हणजे काय तें समजण्यासाठीं एक उदाहरण दिलें आहे. असें समजा कीं, एका लांबलचक चौकोनी मैदानाच्या उजव्या बाजूस एक किल्ला असून त्याचे आ, बा, का असे बुरूज आहेत. मैदानांत एक मारुतीचें देऊळ आहे. एक प्रवासी अ ब क या रस्त्यानें



चालला आहे व अपाशीं उभा आहे. त्यास विचारलें कीं बाबारे, तुला मारुतीचें देऊळ दिसतें काय ? तर तो म्हणेल, ' दिसतें तर ! मारुतीचें देऊळ थेट आ बुरुजाच्या रेषेंत आहे. ' कांहीं वेळानें तो प्रवासी बपाशीं जाईल. यावेळी तो सांगेल कीं, देऊळ काबुरुजाच्या रेषेंत आहे. प्रवासी क–पाशीं आल्यावर सांगेल कीं, देऊळ का बुरुजाच्या रेषेंत आहे. अथवा असें समजा कीं, अ, ब, क या ठिकाणीं तीन निरनिराळीं माणसें आहेत व देऊळ कुठें आहे याचें तीं वर्णन देत आहेत. तर अ–जवळचा माणूस सांगेल कीं देवळाच्या पाठीमागें आ–बुरूज आहे. ब–जवळचा सांगेल कीं देवळामागें बा बुरूज आहे. क देवळाजवळचा माणूस सांगेल कीं देवळामागे का बुरूज आहे. याचा अर्थ देवळाचें स्थान जर बुरुजांशीं सापेक्षत्वानें सांगितलें तर तिघांचें वर्णन एक-मेकांशीं जुळणार नाहीं. म्हणजेच प्रत्येकास देवळाचें स्थान निराळें दिसेल. याला कारण पाहाणाराचें स्थान. म्हणजे प्रेक्षक ज्या ठिकाणीं असेल त्याप्रमाणें तो एकाद्या वस्तूच्या स्थानाचें वर्णन करील. यालाच आर्यभट दृग्भेद असें म्हण तात. आकांशांतल्या ग्रहांना व इतर खगोलांना हाच नियम लागू करतां येतो. उदाहरणार्थ, आपण चंद्र घेऊं या. समजा कीं पृथ्वी वाटोळी आहे. तसेंच एक प्रेक्षक पृथ्वीच्या मध्यबिंदूशीं उभा आहे. (अर्थात् मनुष्य भूमध्य-बिंदूशीं खरोखरीं जाऊं शकत नाहीं. पण आपणांस कल्पनाच करावयाची आहे. म्हणून आपण त्याला पृथ्वीच्या मध्यबिंदूजवळ पाठवूं शकतों) व दुसरा एक प्रेक्षक उत्तरध्रुवाजवळ आहे. असेंही समजा कीं,



पृथ्वीच्या मध्यबिंदूजवळील माणसास अशी दिव्य दृष्टि आहे कीं तिनें तो पृथ्वीच्या

आरपार पाहूं शकतो. अब हें आकाश आहे. आतां आकाशाच्या पार्श्वभूमीवर म–जवळच्या माणसास चंद्र ज्येष्ठेच्या ताऱ्याजवळ दिसेल तर उ–जवळच्या माणसाला तो मूळ नक्षत्रांत दिसेल. याचाच अर्थ एकाद्या खगोलाचें भूपृष्ठावरून होणारें दर्शन हें भूमध्यापासून होणाऱ्या दर्शनाशीं तुलना केल्यास भिन्न होईल. या दोन दिशांत जो कोन होतो त्यास दृग्भेद कोन (Parallax) असें म्हणतात. आर्यभटास दृग्भेदाची स्पष्ट कल्पना होती. ती त्याच्या अगोदर होऊन गेलेल्या सिद्धान्तकारांस नव्हती असें दिसतें. हा दृग्भेद् कोन पृष्ठ २२ वरील आकृतींत मुद्दाम मोठा करून दाखविला आहे. वस्तुतः तो कांहीं कला वा विकला एवढाच असतो.

आर्यभटास ग्रहणांची योग्य कल्पना होती. आपल्या ग्रंथाच्या शेवटीं त्यानें असें म्हटलें आहे कीं, "परमेश्वराच्या कृपेनें या सत्यज्ञानाचे हिरे (जे अज्ञानसागराच्या तळाशीं बुडाले होते त्यांना) मी माझ्या ज्ञानरूपी होडीच्या साहाय्यानें वर आणले आहेत. जे कोणी या स्वयंभूनें (शंकरानें) दिलेल्या दिव्य ज्ञानाचा उपहास करतील त्यांचें पुण्य नष्ट होईल व ते अल्पायुषी होऊन मरतील."¶

आर्यभटाची योग्यता :

माणसाची योग्यता ज्या वेळेस ठरविली जाते त्यावेळीं त्याच्या कार्याविषयीं साधक व बाधक अशा सर्व बाजूंनीं विचार करणें जरूर पडतें. पाश्चात्य लोक आर्यभटास एका बाबतींत दोष देतात. कॅजोरी आपल्या गणितशास्त्राच्या इतिहासांत म्हणतो कीं, "आर्यभटाचा ग्रंथ फारच त्रोटक आहे. इतका कीं तो त्यामुळेंच दुर्बोध झाला आहे." या म्हणण्यांत थोडें तथ्य आहे; पण तत्कालीन परिस्थितीचा विचार केल्यास ग्रंथ त्रोटक कां असत हें समजण्यासारखें आहे. त्या काळीं छापण्याची कला अस्तित्वांत नव्हती हें एक कारण;

¶ आर्यभटीयं नाम्ना पूर्वं स्वायंभुवं सदाऽऽसद्यत् ।
सुकृतायुषोः प्रणाशं कुरुते प्रतिकञ्चुकोऽस्य ॥

व दुसरें म्हणजे विद्यार्थ्यांना सर्वच ग्रंथ मुखोद्गत करावा लागत असे. या दोन्ही कारणांनीं ग्रंथ जितका सुटसुटीत तितका अभ्यासास सोपा असे. शिवाय ग्रंथांत ज्या गोष्टी स्पष्टपणें वर्णिलेल्या नसत त्या गुरुमुखांतून ऐकण्यास मिळत. त्या कारणानें पाश्चात्यांनीं दाखविलेला हा दोष तितकासा महत्त्वाचा नाहीं. गणिताचा इतिहास लिहिणारे बॉलसाहेब म्हणतात, "आर्यभटाचा ग्रंथ त्रोटक झाल्यानें समजण्यास कठीण तर आहेच पण आर्यभटानें आपले सिद्धांत कोठेंहि सिद्ध करून दाखविलेले नाहींत. शिवाय आर्यभटाच्या पुस्तकावर ग्रीक लोकांची छाप दिसते." यांतला शेवटला व दुसरा मुद्दा यांचा संबंध असा आहे. आर्यभट कोठल्याच सूत्राची सिद्धता देत नाहीं हें खरें आहे. पण जर त्याला युक्लिड किंवा दुसऱ्या ग्रीक लेखकाची माहिती असती तर त्यानें त्यांच्या ग्रंथांतून घेतलेल्या सिद्धांताबरोबर त्यांची सिद्धतारीत देखील उचलली असती व आपल्या ग्रंथांत दिली असती. पण तसें झालेलें दिसत नाहीं. म्हणूनच आर्यभटीय हा एक पूर्णपणें स्वतंत्र ग्रंथ आहे. त्याचें जें भुजज्या काढण्याचें कोष्टक आहे तें त्यानें टॉलमीच्या पुस्तकांतून घेतलें आहे, असा आरोप आर्यभटावर केला जातो, पण तें खरें नाहीं. हें कै. दीक्षित यांनीं आपल्या ज्योतिःशास्त्र या ग्रंथांत दाखविलें आहे. भूमितींतील कांहीं सिद्धांत देण्यांत आर्यभटाच्या चुका झाल्या आहेत हें मागेंच दाखविलें आहे.

ब्रह्मगुप्ताची टीका :

आर्यभटाच्या पद्धतीनें ग्रहणांची वेळ बरोबर येत नसे याविषयीं ब्रह्मगुप्तानें त्यावर खूपच टीका केली आहे. साधारणतः जेथें जेथें आर्यभटावर हल्ला करण्याची संधि येईल तेथें तेथें ती ब्रह्मगुप्तानें दोषान्वेषणवृत्तीनें साधून घेतली आहे. तथापि तोहि आर्यभटाची योग्यता जाणत होता.

अल्बेरुणीचें मत :

अल्बेरुणी नांवाचा एक प्रसिद्ध पंडित गझनीच्या महंमदाचे वेळेस त्याच्या दरबारीं ज्योतिषी म्हणून काम करीत असे. अल्बेरुणी ज्या खुरासान

प्रांतांत जन्मला होता त्या प्रांताच्या राजपुत्रास महंमदानें पेशावर प्रांतांत नजरकैदेंत ठेविलें होतें. त्याच्याबरोबर अल्बेरुणीसहि राहाण्याला पाठविलें होतें. इ. स. १०१७ ते १०३० च्या दरम्यान अल्बेरुणी हिंदुस्थानांत होता. तेवढ्या काळांत हिंदूंच्या तत्कालीन शास्त्रांची बरीच माहिती त्यानें मिळवलेली होती. हिंदु पंडितांजवळ बसून त्यानें आपले वेद, पुराणें, शास्त्रें भगवद्गीता इत्यादींचा व संस्कृत भाषेचा चांगलाच परिचय करून घेतला होता. अशा विद्वान् माणसाचें निःपक्षपाती मत महत्त्वाचें आहे. तो आर्यभटास अतिशय मान देतो असें दिसतें.

तो म्हणतो, " मीं स्वतः जरी आर्यभटाचे ग्रंथ वाचलेले नाहींत तरी इतरांच्या ग्रंथांत आर्यभटाविषयीं जें उलट मुलट विवेचन आलेलें आहे तें मीं डोळ्यांखालून घातलें आहे व तें वाचून माझी खात्री झाली आहे कीं, ब्रह्मगुप्त व इतर कांहीं जण यांनीं आर्यभटावर निष्कारण टीका केली आहे. ब्रह्मगुप्ताची टीका तर फारच खालच्या दर्जास गेली आहे. आर्यभटाच्या योग्यतेनुरूप त्यानें टीकेची पातळी राखली नाहीं. तो आर्यभटास वाळवीचा किडा असें संबोधतो व त्याच्यावर कठोर शब्दांनीं प्रहार करतो. वास्तविक आर्यभटास विश्वाचें ज्ञान पूर्वींच्या पंडितांपेक्षां किती तरी जास्त आहे? जग केवढें मोठें आहे हें आर्यभटच जाणतो. आर्यभटाप्रमाणें इतरांना पृथ्वी स्वतःच्या आंसाभोंवती फिरते हें कुठें ठाऊक आहे? आर्यभटानें पृथ्वीचा परिघ व व्यास यांची लांबी चुकीची सांगितली आहे हें खरें; पण ती चूक फारच अल्प आहे. क्षुल्लक चुकीसाठीं ब्रह्मगुप्तानें त्याचे एवढे वाभाडे काढावयास नको होते. "

आर्यभटाच्या योग्यतेला अल्बेरुणीनें दिलेलें हें प्रशस्तिपत्रक योग्य नाहीं असें कोण म्हणेल? आर्यभट १४०० वर्षांपूर्वी होऊन गेला ही गोष्ट जमेस धरली तर त्याचे कांहीं सिद्धांत चुकीचे होते असें असूनही त्याची योग्यता फार मोठी होती हें कबूलच केलें पाहिजे. आर्यभटाच्या पूर्वकाळांत जे पंचसिद्धांत

ग्रहगणितासंबंधानें अस्तित्वांत होते ते फार जीर्ण झाले होते. म्हणजेच त्यावरून केलेल्या ग्रहगणिताला दृक्प्रत्ययाची जोड मिळत नव्हती. ग्रहणें चुकीचीं येत असत. असा जो सांवळागोंधळ गणित व ज्योतिःशास्त्र या दोहोंतही दिसत होता त्यांतला बराचसा गोंधळ आर्यभटानें नाहींसा केला. संख्यालेखन पद्धतीला त्यानें एक निश्चित वळण लावलें. होतकरू गणकानें काय विषय शिकले पाहिजेत याविषयीं एक अभ्यासक्रम त्यानें तयार केला. तत्कालीन, अंक, बीज व भूमिति यांचें जेवढें म्हणून उपलब्ध ज्ञान होतें तें सर्व एकत्र करून एक सुटसुटीत पाठ्य-पुस्तक त्यानें तयार केलें. ग्रहगणितास लागणारी कालक्रिया, भगण, कल्प, युग इत्यादि संख्या निश्चित केल्या व पृथ्वी, सूर्य, विश्व यांसंबंधीं नवीन कल्पना लोकांपुढें ठेवल्या. आर्य लोकांच्या ज्योतिः-शास्त्राचा गाडा त्यानें रुळावर आणून मार्गास लावला. त्यानें आपली शिष्य-शाखाही वाढविली. लल्ल, वराहमिहिर, प्रथम भास्कराचार्य, बलभद्र वगैरे अनेक पंडित आर्यभटाचे ग्रंथच प्रमाणभूत मानीत असत. 'आर्यभटकरण' या नांवाच्या ग्रंथाचा उल्लेख नंतरचे लेखक पुष्कळदां करतात, पण तो ग्रंथ लुप्त झाला असावा.

आपल्या या खंडप्राय देशांत, विशेषतः ज्या काळांत दळणवळणाचीं साधनें नव्हतीं अशा काळांत, आर्यभटाचें गणित व ज्योतिष आसेतुहिमाचल पसरलें व सर्व विद्या गणितपाद वगैरे ग्रंथांवरून लोक शिकूं लागले. इतक्या योग्यतेचा जो पंडित त्याला भारतीय गणित शास्त्राचा पितामह म्हटलें तर तें अयोग्य होईल काय ?

आमचें दुर्दैव इतकेंच कीं, तो किती वयाचा होऊन वारला हें आम्हांस ठाऊक नाहीं. त्याच्या आर्यभटीयाचा मूळ ग्रंथ कुठें आहे त्याचा पत्ता एका कालधर्मासच ठाऊक ! !

प्रश्न

१. आर्यभटीय पुस्तकाच्या चार भागांचीं नांवें सांगा व त्यांत कोणत्या विषयांचा अभ्यास आहे तें स्पष्ट करा.

२. मिताक्षरी भाषेंत पुढील वाक्य लिहा. 'स्वराज्य हा माझा जन्मसिद्ध हक्क आहे व तो मी मिळविणारच !'

३. आर्यभटाच्या वर्गाक्षरपद्धतींत खालील संख्या दाखवा. १८६०००, २९००२, ९२, २३४०००, ३९८. यांतील पहिल्या चार संख्या काय दाखवतात ?

४. कटपयादि पद्धतीनें खालील शब्द कोणत्या संख्या दाखवितील ? रामेण, रावणः, हतः, सीता, च, विमुक्ता.

५. आर्यभट पद्धतीनें पुढील संख्यांचें वर्गमूळ काढा. ९९८००१, ५२५६२५.

६. इष्टकर्मानें खालील उदाहरण सोडवा.

एका व्यापाऱ्यानें प्रत्येकीस ५००० रुपये याप्रमाणें ५० मोटारी खरेदी केल्या. त्यांतल्या कांहीं ६००० रुपये प्रमाणें व उरलेल्या ८००० रुपये प्रमाणें विकल्या. या व्यापारांत त्यास ९६००० रु. नफा झाला. तर प्रत्येक प्रकारच्या मोटारी किती ?

७. पृथ्वी पश्चिमेकडून पूर्वेकडे फिरते असें आर्यभट कां म्हणतो ?

८. दृग्भेद म्हणजे काय ?

९. अल्बेरुणीचें आर्यभटासंबंधीं काय मत आहे ?

१०. रोमन लिपींत खालील संख्या लिहा.

१, ६, ४३, १०८, १९५३.

---

२. ब्रह्मगुप्त

गेल्या प्रकरणांत आपणांस असें दिसून आलें कीं आर्यभटाचा ग्रंथ अल्बेरुणीला पाहाण्यास मिळाला नाहीं. अल्बेरुणीच्या वाक्यांत आर्यभटीय ग्रंथाच्या टीका व त्याविषयीं बलभद्र वगैरे लेखकांचे उद्‌गार एवढेच आले होते. त्यामुळें त्यानें आपलें मत उपलब्ध असलेल्या सामग्रीवरून बनविलें. पण ब्रह्मगुप्त हा आर्यभटापेक्षां अधिक भाग्यवान् म्हटला पाहिजे. कारण त्याचे दोन्ही ग्रंथ अल्बेरुणीनें संपूर्ण वाचले होते. फारसी भाषेंत त्यांचीं भाषांतरें अल्बेरुणीनें स्वतः केलीं होतीं. अरबी व फारसी भाषांत ज्याच्या ग्रंथांचीं भाषांतरें झालीं व तिकडील ज्योतिषांना ज्याचे सिद्धांत वेदवाक्यासारखे प्रमाणभूत वाटत असा पहिला हिंदु ज्योतिषी ब्रह्मगुप्तच होय. युरोप खंडांतल्या गणित्यांची अशी समजूत झालेली आहे कीं, भारतीय गणित्यांना भूमिति समजत नव्हती. प्रमेय कसें सांगावें, त्याची सिद्धता कशी करावी वगैरे गोष्टींत ग्रीक लोक हिंदूंच्या मानानें खूपच पुढें गेलेले होते व अलेक्झांडरच्या काळांत हिंदूंना ग्रीकांचें भूमितिशास्त्र माहीत झालेलें होतें. असें असूनही हिंदूंना भूमिति विषयांत प्रगति दाखवितां आली नाहीं; त्याअर्थीं त्यांना ती दृष्टिच नाहीं असें म्हणण्यापर्यंत पाश्चात्यांची मजल गेलेली आहे. या समजुतीला जबरदस्त धक्का देणारा पहिला गणिती ब्रह्मगुप्तच होय. ज्योतिषशास्त्राच्या अभ्यासूंना सिद्धांत ग्रंथाची अद्ययावत् प्रत नजर करणारा असा ज्याचा लौकिक आहे त्या ब्रह्मगुप्ताचें अल्पसें चरित्र पुढील प्रकरणांत आम्हीं दिलें आहे. भास्कराचार्यांची तुलना जर 'कोहिनूर' हिऱ्याशीं केली तर ब्रह्मगुप्ताची तुलना 'पिट्ट' नांवाच्या दोन नंबरच्या हिऱ्याशीं तरी करावीच लागेल.

जन्मकाल :

ब्रह्मगुप्त हा स्वतःच ज्योतिषी असल्यानें त्यानें आपला जन्मकाल व ग्रंथरचनाकाल हे फार स्पष्टपणें दिलेले आहेत. त्याचा जो प्रमुख आणि विख्यात ग्रंथ ब्रह्मस्फुटसिद्धांत त्यांतला श्लोक असा आहे—

श्रीचापवंशतिलके श्रीव्याघ्रमुखे नृपे शकनृपाणाम् ।
पञ्चाशत्संयुक्तैर्वर्षशतैः पञ्चभिरतीतैः ॥
ब्राह्मः स्फुटसिद्धांतः सज्जनगणगणितगोलवित्प्रीत्यै ।
त्रिंशद्वर्षेण कृतो जिष्णुसुतब्रह्मगुप्तेन ॥

या दोन श्लोकांत ब्रह्मगुप्तानें तीन चार महत्त्वाच्या गोष्टींचा उल्लेख केला आहे. त्यांतली मुख्य अशी कीं 'शालिवाहन शकाच्या ५५० या वर्षीं त्यानें हा ग्रंथ केला व ग्रंथरचना केली त्यावेळीं तो तीस वर्षांचा होता.' याचाच अर्थ हा कीं, ब्रह्मगुप्ताचा जन्म शके ५२० म्हणजे सन ५९८ त झाला. येथें एक गोष्ट लक्षांत ठेवली पाहिजे ती ही कीं, आर्यभट आपल्या ग्रंथाचा काल सांगतांना शक किंवा विक्रम संवत् यांचा उल्लेख करीत नाहीं. पण ब्रह्मगुप्त मात्र शकांत आपलें जन्मवर्ष सांगतो. यावरून शकवर्षांचा उपयोग सर्रास सुरू झाला तो ६ व्या शतकांत झाला असावा.

हे चापवंशीय राजे कोण ?

ब्रह्मगुप्त ज्या राजाच्या पदरीं ज्योतिषी म्हणून काम करीत होता त्याचा उल्लेख पूर्वोक्त श्लोकांत आला आहे. त्याप्रमाणें पाहतां तो चापवंशांतल्या व्याघ्रमुख राजाचा आश्रित होता असें दिसतें. व्याघ्रमुख हा साधासुधा राजा नव्हता. ब्रह्मगुप्त हा दुसऱ्यांचीविनाकारण स्तुति करणारा माणूस नव्हता. ही गोष्ट लक्षांत घेतली तर त्यानें देखील व्याघ्रमुखाला चापवंशतिलक अशी स्तुतिपर पदवी दिली आहे. हा व्याघ्रमुख राजा उत्तर गुजराथमध्यें राज्य करीत होता व त्याची राजधानी सुप्रसिद्ध भिनमाळ या गांवीं होती. व्याघ्रमुख हा वाघेला घराण्याचा मूळ पुरुष म्हणून प्रसिद्ध आहे. याचाच मुलगा करणसिंह हा करण वाघेला म्हणून गुजराथच्या इतिहासांत प्रसिद्ध आहे. त्या काळांत उत्तर गुजराथ हा भरभराटलेला प्रांत होता व भिनमाळ हें एक मोठें शहर होतें. सातव्या शतकांत ह्युएनत्संग नांवाचा जो चिनी प्रवासी हिंदुस्थानांत आला होता तो सांगतो कीं, उत्तर गुजराथची राजधानी

भिनमाळ येथेंच होती व तेथें व्याघ्रमुख राजा राज्य करीत होता. भिनमाळ हें गांव अबूच्या पहाडाच्या वायव्य दिशेस ४० मैलांवर वसलेलें आहे. पूर्वी जरी हें भरभराटीस आलेलें नगर असलें तरी आज तें लहानसें खेडेंच राहिले आहे. हें लुणा नदीच्या कांठाशीं असून गुजराथच्या उत्तर सरहद्दीवर व राजस्थानच्या दक्षिण सरहद्दीवर येतें. आजही गुजराथची सरहद्द भिनमाळ-पर्यंत असावी असें महागुजराथचे पुरस्कर्ते म्हणतातच. भिनमाळ हा शब्द भिल्लमालक या शब्दापासून झाला असावा असें कै. पंडित सुधाकर द्विवेदी म्हणतात. कारण वरुणाचार्य या नांवाचा जो ब्रह्मगुप्ताचा टीकाकार होऊन गेला तो आपल्या टीकेंत 'भिल्लमालकाचार्य' अशी उपाधि ब्रह्मगुप्तास देतो. मला वाटतें भिल्लमालव हें भिल्लमालक यापेक्षां जास्त शुद्ध असें मूळ नांव असावें. या वाघेला वंशांतल्या म्हणजेच चाप वंशांतल्या राजांनीं उत्तर व दक्षिण गुजराथवर इ. स. ९४१ पावेतों राज्य केलें. अनहील हा सुप्रसिद्ध राजा अन्हिलवाड येथें होता. या सर्वांचा चापवंश किंवा चापोत्कट वंश हल्लीं चावडा घराणें म्हणून प्रसिद्ध आहे. अन्हिलवाडपासून भिनमाळ उत्तरेस सुमारें १२० मैलांवर वसलेलें आहे. अल्बेरुणीनें मुलतान व अन्हिलवाड यांच्या दक्षिणोत्तर रेषेवर भिनमाळ आहे असेंच या गांवाचें वर्णन केलें आहे. एकंदरींत ब्रह्मगुप्ताचें जन्मस्थान व त्याला आश्रय देणारे राजे यासंबंधींची माहिती अचूक आहे.

ब्रह्मगुप्ताचें घराणें :

ब्रह्मगुप्ताच्या आजाचें नांव विष्णुगुप्त व वडिलांचें जिष्णुगुप्त असें होतें. नांवांतला गुप्त हा द्वितीयार्ध पाहिल्यावर असें वाटतें कीं, बंगालमध्यें ज्याप्रमाणें चंद्रगुप्त, मयूरगुप्त वगैरे गुप्त घराण्यांतले प्रसिद्ध राजे होऊन गेले तसेंच हे गुप्त राजेबिजे तर नव्हते? पण ही शंका फोल आहे. कारण गुप्त हें अभिधान जसें क्षत्रियांस लागतें तसेंच तें वैश्यांस देखील लागतें आणि जिष्णुगुप्त व त्याचे वडील हे वैश्यच होते. साधारणपणें वैश्य लोक व्यापारी

असतात, ही गोष्ट लक्षांत घेतली तर ब्रह्मगुप्तानें वैश्य असतांनाही ज्योतिः-शास्त्रासारखी पंडिती विद्या हस्तगत केली ही नवलाचीच गोष्ट म्हटली पाहिजे.

ब्रह्मगुप्ताचें शिक्षण :

ब्रह्मगुप्त हा वराहमिहिराचा शिष्य असावा असें दिसतें. वराहमिहिर हा उज्जनीचा राहाणारा होता व हें ठिकाण भिनमाळपासून फार लांब नाहीं. शिवाय वराहमिहिर शके ५०९ मध्यें वारला असें पृथुस्वामी आपल्या टीकेंत म्हणतात. निदान ब्रह्मगुप्तास ज्यांचे ग्रंथ अभ्यासास मिळाले त्यांत वराहमिहिर मुख्य असला पाहिजे. त्यानें (ब्रह्मगुप्तानें) ' आर्यभटीय ' पुस्तकाचा सूक्ष्म अभ्यास केला होता. आर्यभटीय ग्रंथ इ. स. ४९९ त झाला तर ब्रह्मस्फुटसिद्धांत इ. स. ६३० मध्यें झाला. या दरम्यानच्या १३० वर्षांत वराहमिहिर; श्रीषेण, विष्णुचंद्र व कल्याणवर्मा हे चार गणिती झाले. म्हणजे अगदीं सुप्रसिद्ध अशा दोन तरी पुरुषांचे ग्रंथ ब्रह्मगुप्तास वाचावयास मिळाले. वराहमिहिराचे, पंचसिद्धांत लघुजातक व बृहज्जातक हे ग्रंथ त्यानें संपूर्ण अभ्यासिले होते. कल्याणवर्म्याचा सारावली ग्रंथ त्याच्या परिचयाचा होता. आर्यभटाच्या पूर्वी होऊन गेलेले लाट, सिंह, प्रद्युम्न विजयनन्दि यांचे सिध्दांत त्यानें वाचले होते. ¶ यवननरेंद्ररचित म्हणजेच ग्रीक लोकांनीं लिहिलेलीं पुस्तकें त्याच्या अवलोकनांत आलेलीं होतीं असें अल्बेरुणीचें म्हणणें आहे. सारांश, गणित व ज्योतिष या दोन विषयांसंबंधींचे सर्व हस्तगत होण्यासारखें साहित्य त्यानें अभ्यासून काढलें होतें, व या तयारीच्या जोरावरच त्यानें आपला सिद्धांत ग्रंथ लिहिला.

¶ श्रीषेण विष्णुचंद्र प्रद्युम्नार्यभटलाटसिंहानां ।
ग्रहणादिविसंवादात्प्रतिदिवसं सिद्धमकृतत्वम् ।
अंकचितिविजयनंदिप्रद्युम्नादीनि पादकरणाति ।
यस्मात्तस्मात्तेषां न दूषणानि लिखितानि ॥ ब्र. सि. अ. ११

ब्रह्मगुप्ताचे ग्रंथ :

ब्रह्मगुप्ताचे हल्लीं उपलब्ध असलेले दोन प्रसिद्ध ग्रंथ आहेत. त्यांतील पहिल्याचें नांव ब्रह्मसिद्धांत व दुसऱ्याचें नांव खण्डखाद्यक. खण्डखाद्यक ग्रंथांत कांहीं कमतरता होती. ती भरून काढण्यासाठीं ब्रह्मगुप्तानें नवीन भाग रचून मूळ ग्रंथास तो जोडला. या जोडभागास त्यानें उत्तरखण्डखाद्यक असें नांव दिलें. यांतला पहिला ग्रंथ ब्रह्मस्फुटसिद्धांत म्हणून प्रसिद्ध आहे. सिद्धांत शब्दाचा त्या काळांतील अर्थ असा सिद्धांत म्हणजे आकाशांतील ग्रह, तारे, सूर्य, चंद्र वगैरे गोलांच्या गतिनियमांचेमूळ—तत्त्व—विवेचन. असें विवेचन व विवरण ज्यांत असतें अशा ग्रंथास सिद्धांत म्हणतात. असें निदान १० तरी सिद्धांत ब्रह्मगुप्ताच्या अगोदर लिहिले गेलेले होते. परंतु इतके सिद्धांत होते तरी दृश्य ग्रहस्थितीशीं एकाचाही मेळ बसत नव्हता. आर्यभटाचा आर्यसिद्धांत देखील अपुरा पडत होता; म्हणून ब्रह्मगुप्तानें आपला वडा ग्रंथ लिहिला.

ब्रह्मसिद्धांतांत ज्योतिर्गणितास लागणारे सर्व विषय आले आहेत. त्या सर्वांशीं आपणांस कर्तव्य नाहीं. पण त्यांतलें १२ वें प्रकरण अंकगणिता-विषयीं असून १८ वें बीजगणिताचें आहे. एकविसाव्या प्रकरणांत गोलक्रिया सांगितली आहे. अकराव्या अध्यायास दूषणाध्याय म्हटलें तरी चालेल कारण यांत पूर्वींच्या सर्व आचार्यांचे दोष दाखविलेले आहेत.

दुसरा ग्रंथ खंडखाद्यक या नांवानें प्रसिद्ध आहे. त्याला खंडखाद्यक असें नांव कां दिलेलें आहे त्याचें कारण समजत नाहीं असे कै. दिक्षित म्हणतात. पण अल्बेरुणीनें त्याचें कारण सांगितलें आहे. तो म्हणतो कीं, आपल्या पुस्तकास चमत्कारिक नांवें देण्याची पद्धत प्राचीन काळीं देखील होती. चणेफुटाणे, वाऱ्यावरील वावड्या, बुडबुडे अशीं नांवें आज पुस्तकांना दिलेलीं असतात. तथापि आंतला विषय कुचकामाचा किंवा टाकाऊ नसतो. पूर्वींच्या काळांतही असे लेखक झाले होते. सुग्रीव नांवाच्या

एका लेखकानें आपल्या ग्रंथास 'दधिसागर' नांव दिलें आहे. लवणमुष्टि व कुरुबावया (कुरमुरे?) अशीं नांवें कांहीं पुस्तकांना होतींच. त्याच धर्तीवर खंडखाद्यक म्हणजे साखरमिश्रित खाऊ या अर्थाचें नांव ब्रह्मगुप्तानें आपल्या पुस्तकास दिलें असावें. खंडखाद्यकांत ज्योतिर्गणित हाच विषय मुख्यत: आहे. याला तंत्रग्रंथ असें म्हणतात. अहर्गण कसा काढावा, ग्रहांचीं मंदोच्चें, चंद्रसूर्य-ग्रहणें वगैरे विषय त्यांत आले आहेत. गणित करण्यास अत्यंत उपयुक्त अशी या पुस्तकाची प्रसिद्धी आहे व अजूनही आपल्याकडे पुष्कळ प्रांतांतून ब्रह्मगुप्ताच्याच पुस्तकांवरून ज्योतिषी आपलें गणित करतात इतकें त्याचें महत्त्व आहे.

या ग्रंथावरील टीकाग्रंथ :

खंडखाद्यक ग्रंथावर सोमेश्वर, वरुणाचार्य, भटोत्पल, पृथूदकस्वामी, आमराज व त्रिविक्रमाचार्य एवढ्यांच्या टीका आहेत. यांत भटोत्पल, पृथुस्वामी व आमराज यांच्या जास्त प्रसिद्ध आहेत. इ. स. १८१७ मध्यें कोलब्रुक या इंग्रज गृहस्थानें ब्रह्मसिद्धांतांतल्या अंकगणित व बीजगणित या अध्यायांचें इंग्रजी भाषांतर केलें. पृथूदकस्वामीची ब्रह्मसिद्धांतावरील टीका वासनाभाष्य म्हणून प्रसिद्ध आहे.

ग्रंथासंबंधीं विशेष माहिती :

खण्डखाद्यक हा ग्रंथ शके ५८७ मध्यें लिहिला गेला. ब्रह्मसिद्धांत शके ५५० त लिहिला होता. म्हणजे दुसरा ग्रंथ पहिल्यानंतर ३७ वर्षांनीं लिहिला गेला. ब्रह्मगुप्ताची कल्पना अशी होती कीं, आपला सिद्धांत हा सर्व ज्योतिषांना मान्य होईल व ते त्याप्रमाणें गणित करूं लागतील; पण ३५ वर्षांनंतरही जेव्हां लोक आर्यसिद्धांतासच प्रमाण मानतात असें त्यास दिसून आलें तेव्हां त्याला दुसरा ग्रंथ लिहिणें भाग पडलें. खण्डखाद्यक (साखरमेवा) असें नांव देखील देण्यास हेंच कारण असावें, कीं लोकांनीं

त्यामुळें तरी तो ग्रंथ वाचावा. पूर्व-खंडखाद्यक व उत्तर-खंडखाद्यक या दोहोंमिळून २६५ आर्या व १३ प्रकरणें आहेत. यांतला सर्व विषय ज्योतिःशास्त्रासंबधीं आहे. ग्रंथ लिहिण्याचें कारण ब्रह्मगुप्त असें सांगतो,

" वक्ष्यामि खंडखाद्यकमाचार्यायभटतुल्यफलम् ।
प्रायेणार्यभटेन व्यवहारः प्रतिदिनं यतोऽशक्यः ॥
उद्वाहजातकादिषु तत्समफललघुतरोक्तिरतः ॥ "

म्हणजे आर्यभटाच्या पद्धतीनें व्यवहार अशक्य होत चालला आहे. त्याच्याच तोडीचें पण विवाह जातक यांना अनुकूल असें गणित केल्यावांचून गत्यंतर नाहीं म्हणून मीं हा नवीन ग्रंथ केला आहे. ज्योतिषी लोकांस हा ' साखरमेवा ' फार प्रिय आहे असें म्हणतात. कारण वरुणाचार्य आपल्या टीकेंत म्हणतात—

" यत् खण्डखाद्यकमिदं गणितार्पभूतं ।
श्रीब्रह्मगुप्तरचितं व्यवहारकृद्भिः ।
नानाविधैर्विवरणैरथ सारथीभिः ।
सर्वत्र सादरमतीव गृहीतमासीत् ॥ "

ब्रह्मगुप्ताचे दोन्ही ग्रंथ सिंधप्रांतांत अतिशय प्रसिद्ध होते व कदाचित् त्यामुळेंच ते अल्बेरुणीला सहज मिळाले असावे. या दोहोंचीं अरबी भाषेंत भाषांतरें झालीं होतीं. सिद्धांतास अरबी भाषेंत सिंदहिंद अशा नांवानें ओळखतात.¶ ब्रह्मसिद्धांत लिहिण्याचें कारण ब्रह्मगुप्त स्वतःच असें देतो कीं,

¶ बलख येथील ज्योतिषी अबू माशर यांच्या पुस्तकावरून असें स्पष्टपणें दिसतें कीं, ब्रह्मगुप्ताच्या सिद्धांतांत ज्या सारण्या आहेत व ग्रहगणित आहे तें तसेंच त्याच्याही पुस्तकांत आहे. खलीफा अल्मन्सूर याच्या आज्ञेवरून महंमद-बिन्-इब्राहिम-अल्फजारी यानें ब्रह्मसिद्धांतांचें अरबींत भाषांतर केलें व सिंदहिंद किंवा हिंदसिंद असें नांव ठेवलें.

" ब्रह्मोक्तं ग्रहगणितं महता कालेन यत्खिलीभूतं ।
अभिधीयते स्फुटं तज्जिष्णुसुतब्रह्मगुप्तेन ॥
ससाध्य स्पष्टतरं बीजं नलिकादियंत्रेण ।
तत्संस्कृतग्रहेभ्यः कर्तव्यौ निर्णयादेशौ ॥ "

यावरून असें दिसतें कीं, पूर्वींचें ग्रहगणित खिळखिळें झालें होतें म्हणून ब्रह्मगुप्तानें सर्व चुका सुधारून आपला सिद्धांत तयार केला. चुकांना थोडी सुद्धां जागा राहूं नये म्हणून नलिकादियंत्रानें त्यानें स्वतः वेध घेतले.

याशिवाय त्याचा ' ध्यानग्रह ' नांवाचा ७२ आर्यांचा एक ग्रंथ असावा असें कै. दीक्षित म्हणतात. अल्बेरुणीनें जी ब्रह्मसिद्धांताची प्रत पाहिली तिच्यांतल्या २५ व्या अध्यायास ' ध्यानग्रहाध्याय ' असें म्हटलें आहे. हा करणग्रंथ आहे असें अल्बेरुणी म्हणतो. म्हणजे संपूर्ण ब्रह्मसिद्धांत हा मोठा ग्रंथ असून त्यांत १०८० आर्याइतकी श्लोकांची संख्या झाली.

अंकगणित :

आतां ब्रह्मगुप्तानें अंकगणितांत नवीन गोष्टी कोणत्या आणल्या तें पाहूं. आर्यभटाच्या चरित्रांत अंकलेखनाच्या ज्या दोन पद्धति सांगितल्या (अक्षरलिपी व कटपयादि) त्यांचा मागमूसही ब्रह्मगुप्ताच्या सिद्धांतांत दिसत नाहीं. यावरून हिंदूंची जी सुप्रसिद्ध दशमानपद्धति ती ब्रह्मगुप्तकालीं पक्की रूढ झाली होती असें दिसतें. इतकेंच नव्हे तर संख्या लिहितांना ' अंकानां वामतो गतिः ' या नियमानें त्या लिहिण्याचा पायंडा त्यानें पाडला होता हेंही दिसून येतें. त्याचें स्वतंत्र अंकगणिताचें पुस्तक नव्हतें. तसेंच ब्रह्मगुप्तापर्यंत अंकगणित व बीजगणित असे दोन स्वतंत्र भाग नव्हते. ते ब्रह्मगुप्तानें केले. या दुसऱ्या भागास तो कुट्टक असें नांव देतो. बीजगणित हें नांव मागून प्रचारांत आलें.ब्रह्मगुप्ताच्या मतें अंकगणितांत २० प्रक्रिया (बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार वगैरे) व ८ परिकर्में (मिश्रणें, श्रेढि, क्षेत्रमापन वगैरे) आहेत. ब्रह्मगुप्तानंतर जे गणिती

झाले ते सर्व अशीच विभागणी करतात. गुणाकाराची कपाटसंधि रीत ब्रह्मगुप्तास ठाऊक होती. या रीतीचें समग्र वर्णन पुढें भास्कराचार्यांच्या प्रकरणांत केलें आहे, म्हणून येथें तिचा नुसता उल्लेख करून पुढें जाऊं. ब्रह्मगुप्तास खंड, भेद, इष्ट व गोमूत्रिका या पद्धतीदेखील ठाऊक होत्या.

ब्रह्मगुप्ताची वर्ग करण्याची पद्धति :

समजा, आपणांस ७३६ या संख्येचा वर्ग करणें आहे. तर आपल्या नेहमींच्या पद्धतींत आपण ७३६ × ७३६ हा गुणाकार करून ५४१६९६ असा वर्ग दाखवितों. ब्रह्मगुप्त, श्रीधर व महावीर यांची पद्धति खालीं दिली आहे. यांत एकं स्थानच्या अंकाचा वर्ग प्रथम लिहावा. त्याच्या खालीं एकं स्थानच्या अंकाच्या दुपटीनें उरलेल्या संख्येस गुणून तो गुणाकार पूर्वींच्या वर्गाखालीं एक घर डावे बाजूस लिहावा. नंतर एक घर डावीकडे दहं स्थानचा जो अंक असेल त्याचा वर्ग लिहावा. त्याचे डावे बाजूस दहं-स्थानच्या अंकाच्यानें त्याच्या डाव्या बाजूकडील संख्येच्या दुपटीस गुणून येणारा गुणाकार लिहावा. याप्रमाणें सर्व अंकांना करावें.

```
     ७३६
   ×७३६
 ---------
      ३६
   ८७६×
   ०९××
  ४२×××
 ४९××××
 ---------
 ५४१६९६
```

वर्ग करण्याची ही रीत झटपटरंगारी पद्धतीची आहे. पण तिचा एक मोठा फायदा आहे कीं तिच्यांत मोठाले गुणाकार येत नाहींत व चुकायची मुळींच भीति नाहीं. तसेंच या रीतींत साध्या गुणाकाराचें मूळ तत्त्व न सोडतां वर्ग संख्या काढतां येते.

अर्थात् पाटीवर जागा अगदींच थोडी आहे असें समजून वर्ग लिहावयाचा असल्यानें ८७६ व ३६ यांची बेरीज ८७९६ लिहीत. नंतर ९ मिळवून (साता-खालीं) ९६९६ लिहीत. मग पहिल्या नवांत ४२ मिळवून ५१६९६ लिहीत, व शेवटीं ४९ मिळवून ५४१६९६ हें उत्तर आणीत असत. या रीतींत कुठलाच घोटाळा नाहीं. समजण्यास सुलभ अशी ही रीत सांगून ब्रह्मगुप्तानें आपणांवर केवढे उपकार

केले आहेत ! शिवाय यांत स्थानपरत्वें छोटे गुणाकार एक एक घर सरकवून मग बेरीज केली आहे. अर्थात् याविरुद्ध आंकडेमोड करून वर्गमूळ काढतां येईल ही गोष्ट सहजगत्या समजते. किंबहुना जसे भागाकार व गुणाकार हीं दोन उलटसुलट परिकर्मे आहेत त्याचप्रमाणें वर्ग व वर्गमूळ हीं पण आहेत. आपल्या अर्वाचीन वर्ग व वर्गक्रिया या एकमेकांस व्युत्क्रम अशा पद्धतींत नाहींत. त्यामुळें मुलांना वर्गमूळ व घनमूळ काढण्यास फारच अवघड जातें. तसें प्राचीन काळच्या विद्यार्थ्यांस वाटत नसे. ही वर्गप्रक्रिया डावीकडून उजवीकडेही करतां येत असे. समजा, आपणांस १२५ चा वर्ग करणें आहे. तर याचे दोन भाग १ व २५ असे करून ते १ असे लिहा.
×२५

नंतर २५×२ (१ ची दुप्पट) म्हणजे ५० हे एकापुढें लिहा. म्हणजे १५० असें पाटीवर दिसेल. नंतर २ चा वर्ग शून्यांत मिळवून १५४ असें
२५ ×२५

दिसेल. नंतर २५ एक घर उजवीकडे सरकवा. म्हणजे १५४ असें दिसेल.
२५

यांतल्या २×५ म्हणजे १० ची दुप्पट २० वरच्या ४ त (म्हणजेच ४० त) मिळवा. परिणामीं १५६०० असें राहील. शेवटीं ५ चा वर्ग
५

२५ वरच्या शून्यांत मिळवला कीं १५६२५ होतात. अर्थात् यापेक्षां प्रथम सांगितलेली रीत मुलांना समजण्यास सोपी व सरळ आहे.

वर्ग करण्याचे कांहीं आडाखे (Short cuts) ब्रह्मगुप्तानें दिले आहेत. त्यांतला एक असा आहे : समजा, ७५ या संख्येचा वर्ग करावयाचा आहे. तर ७५ हे ७० व ८० च्या दरम्यान आहेत म्हणून ७०×८०+२५ = ५६२५ हा वर्ग झाला. * १२५^{2} = १२०×१३०+५^{2} = १५६००+२५ = १५६२५. ९९^{2} = ९८×१००+१ = ९८०१.

* बीजगणितांत क्ष^{2} = (क्ष − य)(क्ष + य) + य^{2}

संख्यांचा घन करणें :

ज्याप्रमाणें वर्ग करण्याची रीत वर दिली आहे तशाच प्रकारें संख्येचा घन एकदम मांडतां येतो. म्हणजे हल्लीं आपण ज्याप्रमाणें संख्येला तिनें गुणून पुन्हां तिनेंच गुणतों इतकें करण्याची जरूर नाहीं. उदाहरणार्थ, १२३ चा घन काढू या.

१२३	
२७	३ चा घन.
३२४×	९ × ३ × १२ (अंत्याच्या वर्गाची तिप्पट × उरलेला भाग)
१२९६××	३ × ३ × $१२^{२}$ (अंत्याची तिप्पट × उरलेल्याचा वर्ग)
८×××	२ चा घन
१२××××	४ × ३ × १
६×××××	२ × ३ × $१^{२}$
१××××××	१ चा घन
१८६०८६७	

यांतले अंतर्गत गुणाकार एकेक घरानें सरकत आहेत म्हणून चूक होण्याची भीति अगदींच कमी आहे.

वर्गमूळ व घनमूळ यांच्या रीति 'आर्यभट' प्रकरणांत दाखविल्या आहेत. त्याची पुनरुक्ति येथें नको.

अंकगणितांतल्या त्रैराशिकांविषयीं ब्रह्मगुप्त म्हणतो कीं, प्रत्येक त्रैराशिकांत तीन राशि दिलेल्या असतात. त्यांना प्रमाण, फल व इच्छा असें म्हणतात. या तिहींची किंमत माहीत असली म्हणजे चौथी रास (उत्तर) काढतां येते. उदाहरणार्थ, १०।। पण देऊन जर १। पल (पळा) चंदन मिळतें तर ९। पल चंदनास काय किंमत पडेल ? येथें १। पल हें प्रमाण, १०।। पण

हें फल व ९। पल ही इच्छा झाली. रीतीप्रमाणें इच्छा × फल याला प्रमाणानें भाग दिला कीं उत्तर येतें. अर्थात् हें त्रैराशिक सम आहे. व्यस्त त्रैराशिक कसें सोडवावें याचीं दोन उदाहरणें पुढें भास्कराचार्य प्रकरणांत दिलीं आहेत.

विलोमक्रिया ही काय भानगड आहे?

आर्यभट, ब्रह्मगुप्त, महावीर या सर्वांनीं विलोमक्रियेचीं उदाहरणें दिलीं आहेत. ब्रह्मसिद्धांताच्या कुट्टकाध्यायांत ब्रह्मगुप्त म्हणतो—या विलोमक्रियेंत गुणाकाराचा भागाकार होतो; अंशाचा छेद होतो; छेदाचा अंश होतो; धनसंख्या ऋण होते; ऋणसंख्या धन होते; वर्गाचें वर्गमूळ होतें; वर्गमूळाचा वर्ग होतो, असें सर्वच विपरीत होतें. $ शिवाय उदाहरण प्रारंभाकडून शेवटाकडे असें न सोडवितां, शेवटून आरंभाकडे असें सोडवावें लागतें.

उदाहरण—अशी एक संख्या सांगा कीं जिला सातनें भागून येणाऱ्या संख्येस तीननें गुणलें, गुणाकाराच्या वर्गांत ५ मिळवले, त्यास $\frac{३}{५}$ नें भागलें, मग निमपट करून वर्गमूळ काढलें तर ५ येते?

रीत—(विलोमक्रियेनें) $५^{२} = २५.\ २५ \times २ = ५०,\ ५० \times \frac{३}{५} = ३०,\ ३० - ५ = २५,\ \sqrt{२५} = ५,\ ५ \times \frac{१}{३} = \frac{५}{३},\ \frac{५}{३} \times ७ = \frac{३५}{३}.$

$\therefore \frac{३५}{३}$ हें उत्तर.

ब्रह्मगुप्ताचें भूमितीवरील प्रभुत्व :

अंकगणितांत ब्रह्मगुप्त किती प्रवीण होता हें आपण मागें पाहिलें. आतां

$गुणकारा भागहरा भागहरा ये भवन्ति गुणकाराः ।
यः क्षेपः सोऽपचयोऽपचयः क्षेपश्च विपरीते ॥ गणितपाद २८
गुणकच्छेदच्छेदो गुणको धनमृणं ऋणं धनं कार्यम् ।
वर्गः पदं पदं कृतिरन्त्याद्विपरीतमाद्यं तत् ॥

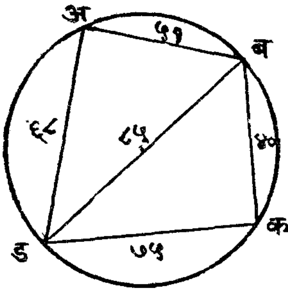
त्याचीं भूमितीचीं कांहीं प्रमेयें पाहूं. या विषयांतली त्याची पारंगतता हा एक कौतुकाचा विषय आहे. त्याच्या वाचनांत ग्रीक लोकांचे ग्रंथ आले असावे. तथापि त्यांना माहीत नसलेलीं कित्येक सूत्रें त्यानें स्वतःच्या तल्लख बुद्धीनें शोधून काढलीं हें पाश्चात्यांनाही नाकारतां आलें नाहीं. भूमितींत त्रिकोण व चौकोनाविषयीं अनेक सिद्धांत त्यानें दिले आहेत. ज्या त्रिकोणाच्या बाजू व लंब पूर्णांक असतात त्यांचा अभ्यास त्यानें जास्त केला होता. ज्याला आजकाल पायथ्या गोरसाचा सिद्धांत म्हणून ओळखतात तो तर त्याच्या हातचा मळ होता. काटकोन त्रिकोणाच्या बाजू पूर्णांक असतील तर त्या कशा ओळखाव्या याचें सूत्र त्यानें दिलें आहे. तो म्हणतो— जर प, फ हे दोन असमान पूर्णांक असतील तर $प^२ - फ^२$, २ पफ व $प^२ + फ^२$ या काटकोन त्रिकोणाच्या बाजू आहेत. म्हणजेच $(प^२ + फ^२)^२ = (प^२ - फ^२)^२ + ४ प^२फ^२$.

उदाहरणार्थ, जर प=५ व फ=३ तर १६, ३०, ३४ या काटकोन त्रिकोणाच्या बाजू होतात.

ज्याच्या बाजू पूर्णांक आहेत असा समद्विभुज त्रिकोण कसा तयार करावा तेंही ब्रह्मगुप्तानें दाखविलें आहे. उदाहरणार्थ, जर प, फ दोन असमान पूर्णांक असतील तर त्रिकोणाच्या बाजू $प^२ + फ^२$, $प^२ + फ^२$, $२(प^२ - फ^२)$ अशा घ्याव्या म्हणजे बाजू व तिन्ही लंब हे पूर्णांक असतात.

वरच्या उदाहरणांत त्रिकोण कसे बनवावे हें सांगितलें. पण खरी करामत याच्या पुढेंच आहे. ज्या चौकोनाच्या बाजू व लंब पूर्णांक असतात असे चौकोन त्यानें तयार करून दाखविले आहेत. हें पूर्णांकाचें वेड त्याच्या रक्तांतच होतें कीं काय समजत नाहीं. कारण असे चौकोन करण्यासाठीं तो निरनिराळ्या क्लृप्त्या योजतो. नमुन्यासाठीं दोन उदाहरणें पहा.

चौकोन : प्रकार १ ला : समजा, आपण दोन काटकोन त्रिकोण



अबड व बकड तयार केले. ते असे कीं, अबड त्रिकोणांत अब = ५१, अड = ६८. व ∠ अ = ९०°; तर बड = ८५. कारण–

५१² + ६८² = ८५². तसेंच बकड त्रिकोणांत बक = ४०, कड = ७५ व ∠ क = ९०°, तर बड = ८५ म्हणजे वर सांगितलेले दोन त्रिकोण बड या रेघेच्या दोन्ही बाजूंस ठेवले तर अबकड हा चक्रीय चौकोन होईल. कारण ∠ अ + ∠ क = १८०°. आतां या चौकोनाची गंमत अशी आहे कीं त्याचा उरलेला कर्ण अक हा सुद्धां पूर्णांकच आहे. कशावरून? तर ब्रह्मगुप्ताचा सिद्धांत असा आहे कीं,

कर्णांचा गुणाकार = प्रतिभुजांच्या गुणाकारांची बेरीज. ¶

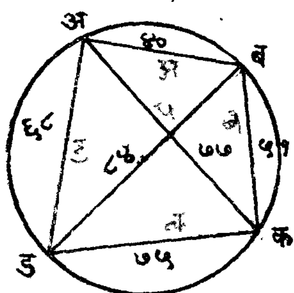
∴ ८५ × अक = ६८ × ४० + ७५ × ५१ = ६५४५.

∴ अक = ७७. या ठिकाणीं मनांत संशय असा येतो कीं, हा सिद्धांत ब्रह्मगुप्तास स्वतंत्रपणें माहीत होता कीं त्यानें तो ग्रीक पुस्तकांत वाचला? दोन्हीही गोष्टी शक्य आहेत. कारण तो पुष्कळ ठिकाणीं केंद्र व मध्य असे शब्द वर्तुळाच्या मध्यबिंदूसाठीं वापरतो. आजसुद्धां आम्ही हे शब्द वापरतों. पण ते पूर्वींच्या लेखकांनीं वापरले आहेत म्हणून. हे शब्द शुद्ध संस्कृत नसावेत असें डॉ. कोलब्रुक म्हणतात. कारण केंद्र व मध्य यांच्यांत मूळ संस्कृत धातु सांपडत नाहीं. तेव्हां ब्रगुह्मप्तानें यवनपुरींतून मिळालेले ग्रंथ वाचले असावे. ही यवनपुरी म्हणजेच अलेक्झांड्रिया शहर होय. तें शिकंदर बादशाहाचें राजधानीचें शहर होतें. एवंच जरी टॉलमीचा सिद्धांत ब्रह्मगुप्तास

¶ टॉलमीचा सिद्धांत

ठाऊक होता असें मानलें तरी त्याचा चमत्कृतिजनक उपयोग करून पूर्णांक-भुजचौकोन निर्माण करण्यांत तो सफल झाला, ही कांहीं लहान गोष्ट नव्हे.

प्रकार दुसरा : खालील आकृतींत अड = ६८, अब ४०, बक= ५१ व कड = ७५ अशा बाजू आहेत. कर्ण एकमेकांस लंब आहेत. तर कर्णांच्या लांब्या काय ?



उत्तर—अक = ७७, बड = ८४ हा सुद्धां चक्रीय चौकोन आहे. या ठिकाणीं ब्रह्मगुप्तानें शुल्ब सिद्धांत $ वापरून अड^2 = अप^2 + डप^2 याचा उपयोग करून डप काढली. तसेंच कर्णांचे उरलेले तुकडे काढले. त्याचें संपूर्ण स्पष्टीकरण देत नाहीं. वाचकांनीं तें काढावें. पण या चौकोनांचा उपयोग त्यानें एक नवीन सूत्र निर्माण करण्यांत केला आहे. आणि तेंच अत्यंत महत्त्वाचें आहे. तो म्हणतो, जर एकादा चौकोन असा असेल कीं (त्याच्या कोनबिंदूंतून वर्तुळ काढतां येईल,$$) तर त्याच्या बाजू मिळल्यास कर्णांची लांबी समजते. म्हणजेच चक्रीय चौकानाचे भुज अनुक्रमानें अ, ब क, ड लांबीचे असले तर—

$$\text{कर्ण पहिला} = \sqrt{\frac{(\text{अ}\times\text{ब}+\text{क}\times\text{ड})(\text{अ}\times\text{क}+\text{ब}\times\text{ड})}{(\text{अ}\times\text{ड}+\text{ब}\times\text{क})}}$$

$$\text{कर्ण दुसरा} = \sqrt{\frac{(\text{अ}\times\text{ड}+\text{क}\times\text{ब})(\text{अ}\times\text{क}+\text{ब}\times\text{ड})}{(\text{अ}\times\text{ब}+\text{क}\times\text{ड})}}$$

$ शुल्ब सिद्धांत—पायथ्या गोरसचा सिद्धांत. फक्त शुल्बसूत्रें पायथ्यागोरसच्य अगोदर ४०० वर्षें तरी अस्तित्वांत होतीं.

$$ चतुर्भुजकोणस्पृशग्वृत्त.

हें सूत्र युरोपीय गणित्यांना सोळाव्या शतकापर्यंत ठाऊक नव्हतें. तसेंच तें केवळ चक्रीय चौकोनालाच लागू पडतें हें ब्रह्मगुप्तास ठाऊक होतेंच. पण त्यानें सरसहा तसें म्हटलें नाहीं म्हणून पाश्चत्य गणिती त्याला दोष देतात. त्रिकोण व चौकोन या आकृतींचीं क्षेत्रफळें काढण्याचीं सूत्रें ब्रह्मगुप्तानें दिलीं आहेत. जर त्रिकोणाच्या बाजू अ, ब, क असतील व स हे त्यांच्या बेरजेच्या निम्याइतके असतील तर क्षेत्रफळ $\sqrt{\text{स (स – अ)(स – ब) (स – क)}}$ इतकें असतें. याला युरोपीय लोक हेरॉनचें सूत्र म्हणतात. आपल्या इकडे तें ब्रह्मगुप्तापासून सर्वांना ठाऊक होतें. पण चौकोनाच्या क्षेत्रफळाचें सूत्र

$$\sqrt{\text{(स–अ) (स–ब) (स–क) (स–ड)}}$$

असें असतें हें ब्रह्मगुप्तानें प्रथमच आपल्या सिद्धांतांत सांगितेंल. या ठिकाणीं हें सूत्र चक्रीय चौकोनास लावावें असें तो स्पष्टपणें म्हणत नाहीं. पण इतर सर्व चौकोनांचा विचार केला तर असें दिसतें कीं, ब्रह्मगुप्त अचक्रीय चौकोनांचा विचार करीतच नाहीं. तेव्हां तशा प्रकारच्या चौकोनांबद्दल तो सूत्रें देतच नाहीं. असें असतां मुद्दाम वेड घेऊन युरोपीय टीकाकार पेडगांवला जातात. त्यांचा रोख असा कीं, ब्रह्मगुप्ताला हीं सूत्रें समजलींच नाहीं. आमचें म्हणणें असें कीं, त्याला अचक्रीय चौकोनांचे गुणधर्म देखील ठाऊक होते. पण ज्या ठिकांणीं चौकोनाच्या बाजू व लंब पूर्णांक येतील तेच चौकोन त्यानें विचारांत घेतल्यामुळें, (जरी त्यानें स्पष्ट म्हटलें नसलें तरी) त्याला चक्रीय चौकोनच अभिप्रेत आहेत. तेव्हां पाश्चात्य लोकांनीं ब्रह्मगुप्ताचा हा जो दोष दाखविला आहे तो दोष नव्हेच. त्या लोकांची समजूत चुकीची झाली आहे.

व्यासपरिघगुणोत्तर :

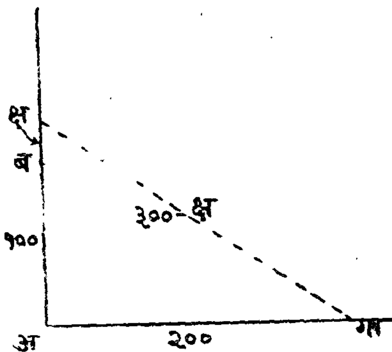
आर्यभटानें 'पाय्'ची किंमत ३·१४१६ इतकी घेतली असें गेल्या प्रकरणांत दाखविलें. त्यावरून ब्रह्मगुप्तानें $\frac{\text{परिघ}}{\text{व्यास}} = \frac{६२८३२}{२००००}$ हेंच गुणोत्तर घेणें योग्य होतें. पण तो पाय् $= \sqrt{१०}$ असें घेतो. याकरितांही त्याला बऱ्याच

इतिहासकारानीं दोष दिला आहे व तो बाजवी आहे. आर्यभटाच्या पावलो-पावलीं ज्यानें चुका दाखविल्या त्याच्या हातून ही चूक व्हावयास नको होती. ज्योतिःशास्त्रांत जेथें पंधराव्या दशांश स्थळीं सुद्धां एकाची चूक चालत नाहीं तेथें $\sqrt{१०} = ३·१६$ घेऊन दुसऱ्याच्या स्थानीं चूक करणारास कोण क्षमा करील? पायची नक्की किंमत ३० दशांश स्थळापर्यंत आर्किमिडीजनें दिली आहे. त्याच्याविषयीं हिंदु गणित्यांना कांहीं तरी माहिती असती तर ही चूक होतीना. ज्या अभिनिवेशानें तो पूर्वाचार्यावर हल्ला करतो त्याला हा हलगरजीपणा शोभत नाहीं हें खरें.

ब्रह्मगुप्ताची कोडीं :

असें म्हणतात कीं, ब्रह्मगुप्तास कोडीं फार आवडत असत. नाहीं तरी कुट्टक शब्दाचा मूळ अर्थ कुटलेलें असाच आहे. कांहीं प्रश्न तो केवळ करमणुकीसाठींच देत असावा असें वाटतें. यांतलें एक पुढें दिलें आहे.

एका झाडावर दोन वानरें रहात होतीं. झाडाची उंची १०० हात होती. झाडापासून २०० हातांवर एक खेडें होतें. एक वानर सरळ झाडावरून खालीं उतरलें व गांवाकडे चालत गेलें. दुसऱ्यानें झाडापासून कांहीं उंचीवर उडी मारून तेथून सरळ गांवाकडे झेंप घेतली. जर दोघांही वानरांना सारखेंच अंतर काटावें लागलें असेल तर झाडापासून दुसरें वानर किती उंच उडालें होतें? एक वानर अर्थातच १०० + २०० = ३०० हात चाललें. समजा, दुसरें क्ष हात उंच उडालें. तर त्रिकोणाचा कर्ण ३००—क्ष झाला.



$\therefore$ (३०० − क्ष)^{२} = २००^{२} + (१०० + क्ष)^{२}
$\therefore$ क्ष^{२} − ६०० क्ष + ९०००० = ४०००० + १०००० + २०० क्ष + क्ष^{२}
$\therefore$ ४०००० = ८०० क्ष $\therefore$ क्ष = ५० हात.

बीजगणितावरील प्रभुत्व :

आर्यभटापेक्षांही ब्रह्मगुप्त बीजगणितांत पुढें गेला होता. वर्गसमीकरण सोडविण्यासाठीं ब्रह्मगुप्तानें दोन प्रकारच्या रीति सुचविल्या आहेत. त्या अशा: समजा आपणांस अक्ष^{२} + बक्ष = क हें समीकरण सोडविणें आहे. तर

पहिल्या नियमाप्रमाणें क्ष = $\frac{\sqrt{४अक + ब^{२}} - ब}{२ अ}$

व दुसऱ्या नियमाप्रमाणें क्ष = $\frac{\sqrt{अक + (ब/२)^{२}} - ब/२}{अ}$ वस्तुतः हे दोन्ही नियम एकच आहेत. नवीन बीजगणिताचें सूत्रहि असेंच आहे. फरक इतकाच आहे कीं, नवीन गणितांत क्षला दोन मूळें येतात. त्यांतलें जें धन आहे तेवढेंच तो विचारांत घेतो. भास्कराचार्य मात्र दोन्हीं मूळें येऊं शकतात असें दाखवितो. यावरून असें मात्र समजण्याचें कारण नाहीं कीं ब्रह्मगुप्त दोन्ही मूळें हिशेबांत घेतच नाहीं. जरूर पडल्यास क्षच्या किंमतींतल्या वर्गमूलचिन्हांतर्गत पदाचे मूल्य धन किंवा ऋण घेऊनही जर क्षच्या धन किंमती येतील तर तो म्हणतो तसेंहि करण्यास मागें पुढें पहात नाहीं. कुट्टकाध्यायांत आपणांस आणखी तीन-चार प्रकारचीं समीकरणें सोडविलेलीं आढळतात. त्यांत क्ष + य = अ, क्षय = ब; किंवा क्ष^{२} + य^{२} = अ; क्षय = ब; किंवा क्ष^{२} − य^{२} = अ; क्ष − य = ब अशा प्रकारचीं समीकरणें पुष्कळ आहेत. तीं सोडविण्याचें नियम ब्रह्मगुप्तानें स्पष्ट करून सांगितले आहेत. ज्यांना अनेक वर्णसमीकरणें म्हणतात. तीं देखील कुट्टकांत सांपडतात. पण ब्रह्मगुप्ताची प्रतिभा या समीकरणांपेक्षां ज्याला मिश्रकुट्टक असें म्हणतात त्या विषयांत विशेष दिसून येते. शालेय विद्यार्थ्यांच्या परिचयाचा असा

एक प्रश्न ब्रह्मसिद्धांताच्या बाराव्या अध्यायांत आहे. तो असा : अशी कोणती संख्या आहे कीं तिला ६ नें भागल्यास ५, ५ नें भागल्यास ४, ४ नें भागल्यास ३, ३ नें भागल्यास २ व २ नें भागल्यास १ अशा बाक्या उरतील ?

या ठिकाणीं सर्व भाजकांचा ल. सा. वि. ६० आहे. तसेंच प्रत्येक वेळीं भाजकापेक्षां बाकी १ नें कमी आहे. म्हणून ६० − १ = ५९ ही लहानांत लहान संख्या आली. हिच्यांत दर वेळीं ६० मिळवीत गेलें तर ५९, ११९, १७९, २३९ या सर्व सख्या वरील प्रश्नांचीं उत्तरें होत. पण वरील प्रश्नांत प्रत्येक ठिकाणीं बाकी भाजकापेक्षां १ नें कमी असल्यामुळें झटकन उत्तर मिळालें. जर उरलेल्या बाक्यांचा त्या त्या भाजकांशीं कांहींच संबंध नसेल तर उत्तर काढण्यास खूप विचारच करावा लागेल. उदाहरणार्थ अशी संख्या शोधून काढा कीं जिला ८ नें भागल्यास ५, ९ नें भागल्यास ४ व ७ नें भागल्यास १ बाकी राहील. ब्रह्मगुप्त म्हणतो कीं, पहिल्या दोन अटी संभाळणारी कमींत कमी संख्या शोधून काढा. ती ५, १३, २१ या श्रेढींत असेल. अर्थात् ती ४, १३, २२, या श्रेढींतही आहे. म्हणजेच ती १३ आहे. नंतर ९ व ८ यांचा ल. सा. वि. ७२ हा १३ त मिळवून एक श्रेढि तयार होते. ती १३, ८५, १५७ अशी होते. यांत ८५ ला ७ नें भागलें तर १ बाकी राहाते. म्हणून ८५ ही इष्ट संख्या होय.

ज्याला वर्गप्रकृति असें नांव आहे अशीं समीकरणें सोडविण्यांत ब्रह्मगुप्त हा आघाडीवरचा गणिती होता. पुढें जें भास्कराचार्यांचें प्रकरण आहे त्यांत वर्गप्रकृतिसंबंधानें अधिक विवेचन केलें आहे. पण या ठिकाणीं ब्रह्मगुप्ताचें एतत्संबंधीं जें प्रमेय आहे तें जरा विस्तृतपणें तपासूं या.

सिद्धांत : क्ष आणि य हीं अव्यक्तें (Unknowns) पूर्णांक आहेत असें समजा. तसेंच $क्ष_1, य_1$ हीं मूळें $अक्ष^2 + ब = य^2$, या समीकरणाचीं धरा. $क्ष_2, य_2$ हीं मूळें $अक्ष^2 + क = य^2$, या समीकरणाचीं धरा. तर

ब्रह्मगुप्त असें सांगतो कीं, ($क्ष_1 य_2 \pm क्ष_2 य_1$) आणि ($य_1 य_2 \pm अ क्ष_1 क्ष_2$) हीं मूलें $अक्ष^2 + बक = य^2$, या समीकरणाचीं असतात. वाचकांना क्षेपक गुणक समजणार नाहींत. म्हणून एक उदाहरण घेऊं. समजा, $७ क्ष^2 + ९ = य^2$ हें समीकरण सोडवायचें आहे तर क्ष आणि य यांच्या कमींत कमी किंमती ४ व ११ होतात. तसेंच $७ क्ष^2 + ८ = य^2$ यांत क्ष व य यांच्या कमींत कमी किंमती २ व ६ होतात. आतां जर $७ क्ष^2 + ७२ = य^2$ हें समीकरण सोडवायचें असेल तर ब्रह्मगुप्त म्हणतो कीं क्ष व य यांच्या किंमती ($४ \times ६ \pm २ \times ११$) आणि ($६६ \pm ७ \times ८$) अशा होतील. म्हणजेच त्या २, १० किंवा ४६, १२२ अशा होतील.

ब्रह्मगुप्तानंतर वर्गप्रकृतीचा सर्व प्रकारांनीं सांगोपांग अभ्यास भास्कराचार्यानें केला होता हें पुढील प्रकरणांत वाचकांस दिसेलच. वर सांगितलेले ब्रह्मगुप्ताचे सिद्धांत हे इ. सन ६२८ त शोधून काढले होते. युरोपखंडांत ते ऑयलरनें इ. स. १७६४ त व लाग्राजनें १७६८त पुन्हां मांडले. आमचें दुर्दैव हेंच कीं, या शोधांचें श्रेय युरोपीय गणित्यांना गेलें. कारण भास्कराचार्यानंतर पुढील ७०० वर्षांत त्याच्या तोडीचा गणिती आमच्याकडे झालाच नाहीं.

बीजगणितांत ज्याप्रमाणें कुट्टक व वर्गप्रकृति विशेष अवघड असे विषय आहेत त्यांचप्रमाणें घनफळमापन हा भूमितींतला अवघड विषय आहे. पण त्यातली दोन अवघड सूत्रें ब्रह्मगुप्तास ठाऊक होतीं. उदाहरणार्थ शंकु व सूचि यांचें घनफळ काढावयाचें असल्यास—

पायाच्या क्षेत्रफळास उंचीनें गुणून तीननें भागावें, $ असें तो सांगतो. पण यापुढें जाऊन शंकुखंड[1] किंवा सूचिखंड[2] यांचें घनफळ काढण्याचे तीन प्रकार सांगतो. त्यांत पहिलें व्यावहारिक फल, दुसरें औत्र फल, व

$ क्षेत्रफलं वेधगुणं समखातफलं हृतं त्रिभिः सूच्याः ।

१ शंकुखंड—Frustum of a cone. २ सूचिखंड—Frustum of a pyramid.

तिसरें सूक्ष्मफल आहे. सुतार लोक ज्यावेळेस लाकडाच्या लांबलचक वांशाचें घनफळ काढतात त्यावेळीं ब्रह्मगुप्ताचें सूत्र वापरतात. ही पद्धत अजूनही चालू आहे. समजा, एक वांसा ४० फूट लांब आहे. त्याचा एका टोंकाचा घेर २० इंच व दुसऱ्या टोंकाचा घेर २४ इंच आहे तर त्याचें घनफळ काय ?

ब्रह्मगुप्त म्हणतो कीं वांशाचा घेर $\frac{२० + २४}{२}$ = २२ इंच होईल. म्हणजेच सरासरी वर्तुळाची त्रिज्या $\frac{७}{२}$ इंच झाली.

अर्थात् वर्तुळक्षेत्र $\frac{२२}{७} \times \frac{४९}{४} \times \frac{१}{१४४}$ चौरसफूट होईल याला ४० फूट लांबीनें गुणलें कीं १० $\frac{२५}{३६}$ घनफूट हें घनफळ होईल. यावर कोणी विचारील कीं कांहो, ब्रह्मगुप्तास फूट कुठें ठाऊक होते ? तर अर्थातच नव्हते. फक्त त्याची पद्धति हिशेब करतांना वापरली आहे. त्याचें स्वतःचें उदाहरण असें आहे.: एक विहीर तोंडाशीं १० हात चौरस आहे, तळाशीं ६ हात चौरस आहे व ३० हात उंच आहे तर तिच्यांत किती घनहात पाणी मावेल ?

ब्रह्मगुप्ताच्या रीतीनें विहिरीची सरासरी बाजू ८ हात झाली. विहिरीचें सरासरी क्षेत्रफळ ६४ हात. म्हणून घनफळ ६४ × ३० = १९२० घनहात झालें. हें व्यावहारिक म्हणजे गवंड्याच्या हिशेबानें झालें. आतां विहिरीच्या तोंडाचें क्षेत्रफळ १०० चौरस हात, तळाचें क्षेत्रफळ ३६ चौरस हात म्हणून क्षेत्रफळाचें मध्यममान $\frac{१०० + ३६}{२}$ = ६८. अर्थात ६८ × ३० = २०४० घनहात हें औत्र घनफळ होय. ब्रह्मगुप्त म्हणतो कीं जर आपणांस सूक्ष्म घनफळ हवें असेल तर औत्र व व्यावहारिक फळांच्या फरकाचा तिसरा हिस्सा व्यावहारिकांत मिळवा म्हणजे सूक्ष्म फळ येईल.$ नवीन घनभूमितीप्रमाणें हें सूत्र अगदीं बरोबर आहे.

$Volume of a frustum $= \frac{h}{3}\left\{ A + A' + \sqrt{AA'} \right\}$.

See Dr. Mahajani's Solid Geometry.

वर दिलेलीं सूत्रें विद्यार्थी वाचकांच्या आंवाक्याबाहेर आहेत. असें जरी असलें तरी तीं अशाकरितां दिलीं आहेत कीं ब्रह्मगुप्त सर्व प्रकारच्या गणितांत किती पुढें गेला आहे ह्याची नीट कल्पना वाचकांना यावी. केवळ गणितविद्येंत जो इतका पुढें होता तो ज्योतिःसिद्धांतांत किती पुढें गेला असेल हें समजेलच. तथापि ज्योतिःशास्त्रविषयक भागांत अनेक पारिभाषिक शब्द व कल्पना ठाऊक असल्याशिवाय तो विषय समजणें कठीण आहे. म्हणून ज्योतिःशास्त्र व फलज्योतिष या विषयांसंबंधीं फारसा उल्लेख व विवेचन येथें केलेलें नाहीं.

महान् ज्योतिर्गणिती :

आर्यभटानें जरी ज्योतिःशास्त्राचा पाया घातला होता तरी त्याच्या सर्वांगीण प्रगतीला मुख्य हातभार ब्रह्मगुप्तानेंच लावला. ग्रहभ्रमण म्हणजे एका कल्पांत* ग्रहांच्या आकाशमंडलांत होणाऱ्या प्रदक्षिणा, मंदोच्चें, पात यांचा तो स्वतंत्र शोधक होता. त्याला अयनगति ठाऊक नव्हती. तथापि अयनचलन जर त्याला समजलें असतें तर आज आपल्या पंचागांत जे घोटाळे दिसतात ते कमी प्रमाणांत दिसले असते. वेध घेण्यासाठीं त्यानें स्वतःचीं यंत्रें बनविलीं होतीं, त्या प्राचीन काळाचा विचार करतां इतका कल्पक ज्योतिषी आपल्या देशांत निर्माण झाला हें आमचें भाग्य होय.

टीकाकार ब्रह्मगुप्त :

मागें सांगितलें होतें कीं, ब्रह्मसिद्धांतांत ११वा अध्याय हा दूषणाध्याय म्हणून प्रसिद्ध आहे. त्यांत ब्रह्मगुप्तानें आपल्यापूर्वीं होऊन गेलेल्या आचार्यांचे दोष दाखविलेले आहेत. विशेषतः आर्यभटाचा तो वैरी असावा असें वाटण्याइतके दोषदिग्दर्शन त्यानें केलें आहे. इंग्रजींत कुत्र्यासंबंधीं अशी म्हण आहे कीं, 'कुत्र्याला वाईट म्हणा व फांशी द्या.' तसेंच ब्रह्मगुप्तानें आर्यभटाचे बाबतींत वर्तन केलें आहे. ज्या ज्या ठिकाणीं

* कल्प = ४३२०००००० वर्षे.

आर्यभटाची अल्प चूक झाली आहे त्या त्या ठिकाणीं ब्रह्मगुप्तानें त्याला फैलावर घेतलें आहे. पूर्वाचार्यांचे दोष दाखवितांना ब्रह्मगुप्तानें संयम पाळला नाहीं असें म्हणणें भाग आहे. तो म्हणतो, " स्वत: आर्यभटालाच गणित, काल व गोल यांची नीटशी माहिती नाहीं. मग त्याची प्रत्येक चूक पृथक्पणें दाखविण्यांत तरी स्वारस्य काय? आर्यभटानें किती प्रमाद केले आहेत ते सांगणेंच अशक्य आहे." $ ब्रह्मगुप्तानें वराहमिहिरास कोठेंच दोष दिल्याचें दिसत नाहीं. याचें कारण तो स्वतःस वराहाचा शिष्य म्हणवितो. पण पूर्वींच्या ज्योतिषांत ज्यांनीं ज्यांनीं प्रमाद केले त्या सर्वांवर त्यानें टीकास्त्र सोडलें आहे. अगदीं नांव घेऊन दोषदर्शन केलें आहे. त्यामुळें ब्रह्मगुप्तास अहंकार झाला होता असें वाटतें. तथापि ब्रह्मगुप्तावर त्याच्यानंतर झालेल्यांनीं टीका केलीच आहे. लल्लानें व बटेश्वरानें त्याचेहि दोष दाखविलेच आहेत.

ब्रह्मगुप्ताची योग्यता :

भास्कराचार्य, आर्यभट व ब्रह्मगुप्त यांच्यांत तुलनेनें ब्रह्मगुप्त भास्कराचार्यांपेक्षां थोडा कनिष्ठ म्हटला पाहिजे. तथापि तो ५०० वर्षें अगोदर होऊन गेला ही गोष्ट त्याच्या योग्यतेंत भरच घालते. आर्यभटास जितके विश्व चमत्कार ठाऊक होते. त्यापेक्षां ब्रह्मगुप्तास खासच अधिक ज्ञात होते. गणित, बीज व भूमिति या तीनहि शास्त्रांत त्याची बुद्धि अप्रतिहतपणें वावरत होती. पाश्चात्यांची मति गुंग होईल असे नवीन शोध त्यानें लावले होते. अरबस्तानांत अब्बासिदी राजा अल्-मन्सूर यानें त्याचे ग्रंथ मागवून त्यांचीं भाषांतरें करवून घेतलीं. त्याचा ग्रीक ग्रंथाशीं परिचय झाला होता. तो उज्जयिनी येथील वेधशाळेंत काम करीत होता असें दिसत नाहीं. तथापि त्या ठिकाणीं काम करण्यास त्याच्या इतका

$ जानात्येकमपि यतो नार्यभटो गणितकालगोलानाम् ।
न मया प्रोक्तानि ततः पृथक् पृथक् दूषणान्येषाम् ॥
आर्यभटस्य दूषणानां संख्यां वक्तुं न शक्यते ।

लायक ज्योतिषी त्या काळीं कोणी नव्हता. काश्मीर प्रांतांत व इतर भारतांत 'खण्डखाद्यक' हें करणग्रंथ म्हणून कित्येक वर्षें वापरलें जात होतें.

अर्थात् ब्रह्मगुप्त हा भास्कराचार्यासारखा रसिक कवि होता असें वाटत नाहीं. गणितांतल्या प्रश्नांना साहित्यिक कलाटणी देण्याचें कौशल्य त्याच्या ठिकाणीं नव्हतें. त्याची लेखनशैली आकर्षक नाहीं. त्याच्या भाषेंत ताठरपणा व अहंकार यांचें मिश्रण आढळतें. 'पाय्'ची किंमत त्यानें बरोबर घेतली नाहीं.

वरील दोष सोडले तर ब्रह्मगुप्ताइतका तीव्रबुद्धि व कल्पक ज्योतिषी भास्कराचार्यांखेरीज दुसरा झालाच नाहीं. त्यानें वयाच्या ६७ व्या वर्षीं खण्डखाद्यक ग्रंथ केला यावरून त्याच्या कार्यक्षमतेची कल्पना येते. वयाच्या उत्तरार्धांत त्याचें आर्यभटाविषयीचें मत निवळलें असावें. कारण कांहीं झालें तरी आर्यभटाचें मत प्रमाण मानणारे ज्योतिषी सगळीकडे होतेच. पण आपल्या बावनकशी गुणानें तो भास्कराचार्यांचाही मानीव गुरु झाला होता.

इतकें असूनही अनेक पाश्चात्य गणिती त्याच्याकडे अनुदार नजरेनें पाहातात. पण हा त्यांच्या दृष्टीचा दोष आहे इतकेंच म्हणतों.

ब्रह्मगुप्त कधीं वारला तें नीट समजत नाहीं. तो रेवानगरीच्या व्याघ्रमुख राजाच्या पदरीं शेवटपर्यंत होता. त्याच्या ग्रंथाची मूळ प्रत मिळत नाहीं. अल्बेरुणीला ब्रह्मसिद्धांताचें एक पान सांपडलें होतें असें तो म्हणतो. त्यांत फारसें तथ्य नसावें.

प्रश्न

१. ब्रह्मगुप्ताच्या राहण्याच्या स्थळासंबंधीं माहिती सांगा.

२. गुर्जरवीर अनहील याच्याबद्दल ऐतिहासिक माहिती द्या.

३. खंडखाद्यक असें नांव ब्रह्मगुप्तानें आपल्या ग्रंथास कां दिलें ?

४. दूषणाध्याय हें काय आहे ? त्याचा उद्देश काय होता ?

५. अंकलेखनाची दशमानपद्धति म्हणजे काय ? ती नक्की केव्हां हिंदुस्थानांत रूढ झाली ?

६. ब्रह्मगुप्ताच्या पद्धतीनें पुढील संख्यांचे वर्ग मांडा;

४५६, ९९९, १५५, ४०९६, १५६२५.

७. विलोमक्रिया म्हणजे काय? तुमच्या अंकगणिताच्या पुस्तकांतून विलोमक्रियेनें सुटतील अशीं पांच उदाहरणें दाखवा व तीं सोडवा.

८. चक्रीय चौकोनासंबंधीं कोणते सिद्धांत तुम्हांस ठाऊक आहेत? त्यांत ब्रह्म गुप्तानें काय भर टाकली?

९. पाश्चात्य गणित्यांना आश्चर्य करावयास लावणारे ब्रह्मगुप्ताचे कोणते शोध आहेत?

१०. ब्रह्मस्फुटसिद्धांत हें काय आहे?

---

३. भास्कराचार्य (दुसरा)

या प्रकरणांत ज्या गणितज्ञाचें चरित्र आम्ही सांगणार आहों तो भास्कराचार्य दुसरा होय. याच्या अगोदर सुमारें सहाशें वर्षें पहिला भास्कराचार्य होऊन गेला. तो इतका प्रसिद्ध नव्हता; परंतु लीलावतीकार भास्कराचार्य हा जगांत इतका प्रसिद्ध झाला आहे कीं, त्याची कीर्तिदुंदुभि आज ७०० वर्षें पौर्वात्य व पाश्चात्य गणितज्ञांच्या कानांत सारखी निनादत आहे. वायरस्ट्रास नांवाचा एक महान् जर्मन गणिती एकोणिसाव्या शतकाच्या उत्तरार्धांत अतिशय प्रसिद्धीस आलेला होता. त्यानें गणितज्ञाची व्याख्या करतांना असें म्हटलें आहे कीं, 'कुठलाही गणिती जर थोडा बहुत कवि नसेल तर तो उत्तम प्रकारचा गणिती होऊंच शकणार नाहीं!' हें त्याचें म्हणणें विनोदाचा भाग नव्हे. आतांपर्यंत झालेल्या पाश्चात्य गणित्यांत ज्यांना काव्यें करण्याची व वाचण्याची आवड होती असे पुष्कळच गणिती आहेत. उमरखय्याम हा मूळचा गणिती; पण 'रुबाया' काव्य त्यानें लिहिलेंच आहे. ह्या निकषावर जर भास्कराचार्यांचें गणिती प्रावीण्य घासून पाहिलें तर तो १०० टक्के गणिती होता असें आढळून येईल. ज्या भारतीय गणित्यांपुढें युरोप-अमेरिकेंतले आधुनिक गणिती नतमस्तक होतात त्यांच्यांत भास्कराचार्य अग्रेसर आहे.

जन्मकालासंबंधीं माहिती :

भास्कराचार्यांच्या जन्मासंबंधीं पुष्कळच विश्वसनीय माहिती आपणांस मिळते. भास्कराचार्यांचा मुख्य ग्रंथ 'सिद्धांत–शिरोमणि' या नांवानें प्रसिद्ध आहे. त्याचा चतुर्थ भाग 'गोलाध्याय' म्हणून आहे. त्यांतल्या प्रश्नाध्याय प्रकरणाचा अठ्ठावन्नावा श्लोक पुढें दिला आहे.

" रसगुणपूर्णमहीसमशक नृपसमये ऽ भवन्ममोत्पत्तिः ।
रसगुणवर्षेण मया सिद्धान्तशिरोमणी रचितः ॥ "

वरील श्लोकांत रस = ६, गुण = ३, पूर्ण = ० व मही = १ असे अंक अभिप्रेत आहेत. संस्कृत काव्याचे जे संकेत आहेत त्याप्रमाणें पाहातां व 'अंकानां वामतो गतिः' म्हणजे संख्या उजवीकडून डावीकडे लिहावी हा संकेत लक्षांत घेतला तर भास्कराचार्य शके १०३६त (इ. स. १११४) जन्मला व वयाच्या ३६ व्या वर्षीं (इ. स. ११५० त) त्यानें आपला सिद्धांत ग्रंथ लिहिला असें दिसतें.

कुलासंबंधीं वृत्त :

गोलाध्यायाच्या प्रश्नविचार प्रकरणाच्या शेवटीं भास्कराचार्यानें स्वतःच्या कुलाविषयीं थोडी माहिती दिली आहे. तीवरून त्याचें गोत्र शांडिल्य होतें. वडिलांचें नांव महेश्वर असून ते स्वतः गणितशास्त्रांत निष्णात होते. भास्कराचार्य आपली सर्व विद्या त्यांच्याजवळच शिकला असे तो म्हणतो. आपलें राहण्याचें ठिकाण सह्याद्रीच्या पायथ्याशीं असलेलें विज्जलविड गांव आहे असें तो म्हणतो. $

विज्जलविड कुठें आहे ?

विजलविड या नांवांतली शेवटचीं दोन अक्षरें अपभ्रष्ट होऊन बीड

$ आसीत्सह्यकुलाचलाश्रितपुरे त्रैविद्यविद्वज्जने ।
नानासज्जनधाम्नि विज्जलविडे शांडिल्यगोत्रो द्विजः ॥

शब्द होतो. त्यामुळें कांहींच्या मतें भास्कराचार्य बीड गांवाचा होता. हल्लींचें बीड हें अहमदनगरच्या पूर्वेस ४० मैलांवर आहे. तेथें सह्याद्रीचा मागमूसही नाहीं. त्यावरून व तेथें हल्लीं भास्कराचार्यांचे कोणी वंशजही नाहींत यावरून विज्जलविड हें बीड नव्हे. मग तें मोंगलाईतील बेदर असेल काय अशी शंका येते. ही शंका येण्याचें कारण अकबराच्या पदरीं जो फैजी म्हणून कवि होता त्यानें लीलावतीचें पर्शियन भाषेंत जें भाषांतर केलें आहे (इ. स. १५८७) त्यांत भास्कराचार्य बेदरचा राहाणारा होता असें म्हटलेलें आहे. पण बेदर सोलापूरच्या पूर्वेस ५० मैलांवर आहे व त्या गांवाजवळ डोंगराचा एक सुळकाही नाहीं. अर्थात् विज्जलविड हें बेदरही नव्हे. भास्कराचार्यांच्या काळीं बेदरजवळ कल्याण येथें चालुक्य वंशाचे राजे राज्य करीत असत. पण त्यांच्यासंबंधीं भास्कराचार्यांच्या ग्रंथांत कोठेंच उल्लेख नाहीं व चालुक्य वंशाच्या इतिहासांतही तत्कालीन राजांचा भास्कराचार्यांशीं संबंध आल्याचा उल्लेख नाहीं. मग विज्जलविड म्हणजे विजापूर असेल काय? भास्कराचार्य हा कानडी ब्राह्मण असून वैष्णवसंप्रदायी होता असें कांहीं लोक मानतात. पंडित सुधाकर द्विवेदींच्या मतें तो वैष्णव ब्राह्मण असला पाहिजे. कारण गोलाध्यायाच्या भुवनकोश नामक प्रकरणांत तो वारंवार विष्णुपुराणांतले उतारे देतो. आणि म्हणून तो विजापूरचा असावा. पण विजापूर सह्याद्रीपासून १०० मैल तरी लांब आहे. तसेंच विजापूर हा विद्यापूर या शब्दाचा किंवा विजयपूर या शब्दाचा अपभ्रंश असण्याची जितकी शक्यता आहे तितकी विज्जलविडचा असण्याची नाहीं. यावरून विज्जलविड हें हल्लींचें विजापूर नाहीं. तसेंच भास्कराचार्य कर्नाटकी ब्राह्मण नव्हता हें पुढें दिलेल्या पुराव्यावरून दिसतें. वासनावार्तिकांत नृसिंह नांवाचा टीकाकार म्हणतो—" विज्जल-विडनिवासी पवित्रितदण्डकारण्यः महाराष्ट्राणामाश्रयो महेश्वरनंदनः श्रीभास्कराचार्यः। मरीचि टीकाकार मुनीश्वर विज्जलविडचें स्थान नक्की कोठें आहे हें सांगतांना म्हणतात— " सह्यकुलपर्वतान्तर्गतभूप्रदेशे महाराष्ट्र-

देशान्तर्गतविदर्भापरपर्यायविराटदेशादपि निकटे गोदावर्यां नातिदूरे पञ्चक्रोशान्तरे विज्जलविडम् ।" यावरून असें दिसतें कीं गोदावरी नदीपासून थोड्या उत्तरेस वऱ्हाडच्या अलीकडे महाराष्ट्रांत हें गांव होतें. कै. डॉ. भाऊ दाजी यांनीं चाळीसगांवापासून दहा मैलांवर पाटण म्हणून जें खेडें आहे, तेंच विज्जलविड असावें असें आपल्या रॉयल एशियाटिक सोसायटीच्या मासिकांतील लेखांत दाखविलें आहे. कारण पाटण येथील भवानीच्या देवळांत जो एक शिलालेख आहे त्यांत पुढील माहिती आढळते. ¶

पाटण येथील शिलालेख :

भास्कराचार्यांचा नातू चंगदेव हा यादव वंशांतील सिंघण राजाच्या पदरीं ज्योतिषी होता. चंगदेवानें भास्कराचार्यांचे ग्रंथ व त्याच्याच वंशांतल्या इतरांचे ग्रंथ अभ्यासण्यासाठीं पाटण येथें एक मठ बांधला. सिंघण राजा शके ११३२ ते ११५९ या काळांत देवगिरीस राज्य करीत होता. सिंघणाचा मांडलिक निकुंभ वंशांतला सोन्हदेव ऊर्फ सोइदेव (सूर्यदेव ?) हा त्यावेळीं खानदेशांत राज्य करीत होता. सिंघणाच्या सांगण्यावरून त्यानें व त्याचा भाऊ हेमाडी यांनीं मठासाठीं कांहीं नेमणुका, जमीन वगैरे दिली. या सर्व नेमणुका पुढील राजांनीं कायम ठेवाव्या व देत जाव्या असें शिलालेखाच्या शेवटीं म्हटलें आहे. दुसराही असाच शिलालेख चाळिसगांवच्या उत्तरेस बहाळ म्हणून गांव गिरणेच्या कांठीं आहे तेथल्या देवीच्या देवळांत आहे. तो लेख अनंतदेवानें कोरविलेला आहे. हाही भास्कराचार्यांचा वंशज असावा असें दिसतें. तसेंच कै. डॉ. भाऊ दाजी यांस खुद्द नाशिक क्षेत्रीं एक ताम्रपट सांपडला होता. त्यांत भास्कराचार्यांस पुत्रपौत्र होते असें म्हटलें आहे. व चंगदेवास सोनदेव राजानें जें भूमिदान दिलें ते दानपत्रच ताम्रपटावर खोदलेलें आहे. त्या दानपत्राचें मराठी शके ११२८ म्हणजे इ. स. १२०६ मधलें आहे. ज्ञानेश्वरांची ज्ञानेश्वरी शके १२१२ त लिहिली

¶ समग्र शिलालेख संस्कृतांत आहे. सुधाकर द्विवेदी यांच्या गणकतरंगिणींत तो पाहावयास मिळेल.

गेली. तो काळ या ताम्रपटाला अतिशय जवळचा असल्यानें त्या वेळचें गद्य मराठी कसें होतें याचा एक नमुना म्हणून ताम्रपटांतील तेवढाच भाग आम्ही वाचकांपुढें ठेवतों.

ताम्रपटावरील दानपत्र :

स्वस्ति श्री शके ११२८ प्रभवनाम संवत्सरे श्रीश्रावणेमासे पौर्णिमास्यां चन्द्रग्रहणसमये श्रीसोन्हदेवेन सर्वजनसंनिधौ हस्तोदकपूर्वकं निजगुरुरचित-मठायाग्रस्थानं दत्तम्। तद्यथा—

इयां पाटणीं जे कणे उघटे तेहाचा जो सिन्दू जो राऊला होता ग्रोहका-प्रासीं तो मठा दिन्हला ब्राह्मणाजें दिकहे ब्रह्मोत्तरतं ब्राह्मणी दिन्हले ग्राहका-पासि दाहाचा वीसोवा असुपाठी गिधव ग्राहकापासी। पंच पोफासि ग्राहका-पासि पहिवहिले आघणीं आदाणा चीलोमठा दिन्हला जेति घाणे वाहति तेतियां प्रतिपली पलीतला जेम विजेने मंठीचे नमाय-नवावे मापा उगठा अर्द्ध अर्द्ध मापाचे हारिभूपाचे स्तूक तथा भूमिः चतुराघाटविशुद्धा ३०६ ग्रामवाले—कामतामध्य—तथा कल पण्डिताकालतु मी चउरा धामोजीची सोढी आ ॥

थोडक्यांत अर्थ असा :

या पाटण गांवांत जे घाऊक व्यापारी आहेत त्यांची म्हणून जी ठेव होती ती त्यांनीं मठाला दान दिली. गांवांतल्या ब्राह्मणांस ब्रह्मोत्तर नांवाची जी मिळकत गांवकऱ्यांकडून होत असे ती त्यांनीं मठास अर्पण केली आहे. गांवांत जे तूप विकलें जातें त्यांवर 'असु नांवाचा एक कर घेतला जातो. त्याचा विसावा हिस्सा मठाकडे जाईल. गांवांत तेली लोकांचे जे घाणे चालतात त्यांतल्या पहिल्या घाण्यामागें एक लोटी तेल व पुढें प्रत्येक घाण्यामागें एक पळी तेल मठास मिळावें. ह्या तेलाचें माप मठाच्या भांड्यानें व्हावें. मठासाठीं जमीन चोहोंबाजूंनीं मोजून दिली आहे. एके बाजूस कामताची जमीन, एके बाजूस पंडितांची चउरा (चरण्याची जमीन) व एके बाजूस धामोजीची टेकडी आहे.

(हें शब्दशः भाषांतर नसून फक्त रूपांतर आहे.)

वरील वर्णनावरून असें दिसतें कीं भास्कराचार्यांनीं जी ज्ञानगंगा निर्माण केली ती अखंड वाहात राहावी म्हणून तत्कालीन राजांनीं व स्वतः त्याच्या नातवानें खूपच प्रयत्न केला.

विज्जलविड म्हणजेच कोल्हापूरजवळ असलेलें बीड हें गांव असावें असा पुरावा कांहीं शिलालेखावरून हल्लीं उपलब्ध होऊं पहात आहे. कारण जैनधर्मी विज्जल नामक राजाचें राज्य कोल्हापूरच्या आसपास त्या काळीं होतें. परंतु हा पुरावा फारच अपुरा आहे. अद्यापि खरें विज्जलविड कोठें आहे याची नीट शहानिशा झालेली नाहीं. या विषयावर अजून संशोधन आवश्यक आहे.

भास्कराचार्यांची वंशावळ :

वर जो पाटणचा शिलालेख उल्लेखिला आहे, त्यामध्यें भास्कराचार्यांच्या पूर्वजांची कांहीं पिढ्यांचीं नांवें सांगितलीं आहेत. तीं अशी—त्रिविक्रम, भास्करभट्ट, गोविंद, प्रभाकर, मनोरथ, महेश्वर, भास्कर, लक्ष्मीधर व चंगदेव. ज्याप्रमाणें राजघराण्याची वंशावळ असते तशाच प्रकारें ही वंशावळ आहे. त्यावरून भास्कराचार्यांचे पूर्वज उत्तम प्रकारचे ज्योतिषी होते ही गोष्ट दिसून येते.

भास्कराचार्यांचें शिक्षण :

भास्कराचार्य हा अत्यंत कुशाग्रबुद्धीचा विद्यार्थी असला पाहिजे हें निराळें सांगण्याची गरज नाहीं. तो आपले वडील महेश्वर यांच्याजवळ सर्व शास्त्रें पढला असें त्याच्या बीजगणिताच्या शेवटीं त्यानें स्वतःच सांगितलें आहे.‡ खुद्द महेश्वर हे श्रौतस्मार्तविचारसारचतुर होते व निःशेषविद्यानिधि होते. (गोलाध्याय ६१) अशा अधिकारी गुरूच्या तालमींत भास्कराचार्य

‡ आसीन्महेश्वर इति प्रथितः पृथिव्याम् । आचार्यवर्यपदवीं विदुषां प्रपन्नः ।
लब्ध्वावबोधकलिकां तत एव चक्रे । तज्जेन बीजगणितं लघु भास्करेण ॥

तयार झाला होता. तो काव्य, व्याकरण, गणित, ज्योतिष वगैरे त्या काळीं मिळणारें सर्व ज्ञान पूर्णपणें मिळविलेला, असामान्य ज्योतिषी होता. खानापूरकरशास्त्री यांनीं लीलावतीचें भाषांतर १८९७त केलें होतें. त्यांत ते म्हणतात—आठ व्याकरणें, सहा वैद्यकीय ग्रंथ, सहा प्रकारचीं न्यायशास्त्रें, पांच प्रकारचीं गणितशास्त्रें, चार वेद, पूर्व मीमांसा, उत्तर मीमांसा, गीताभाष्य, दशोपनिषद् भाष्य, शारीरभाष्य ह्या ग्रंथांचें अध्ययन केलेला असा भास्कराचार्य नामक कवि, हा या लीलावतीचा कर्ता होय.† त्याला गणेश दैवज्ञानें आपल्या बुद्धिविलासिनी टीकेंत गणकचक्रचूडामणि अशी पदवी दिली आहे. भास्कराचार्य हा गणित व ज्योतिष विषय शिकविण्यांतही निष्णात होता. त्याच्या शिष्यांबरोबर वादविवाद करण्यास त्या काळचे शास्त्री, पंडित घाबरत असत असें ताम्रपटांतील श्लोकांवरून दिसतें.

ही लीलावती कोण ?

भास्कराचार्यानें रचिलेला व जगाच्या कानाकोंपऱ्यांत ज्या ग्रंथाची प्रसिद्धी झाली त्याचें नांव लीलावती. लीलावती हें पुस्तक भास्कराचार्यांच्या सिद्धांतशिरोमणि या ग्रंथाचा प्रथमभाग होय. हें पुस्तक अंकगणितासंबंधीं असून त्यांत नेहमींचें अंकगणित व क्षेत्रमापन, घनमापन, श्रेढि, अंकपाश, त्राशिक व सार्वांशिक विपर्यय इत्यादि प्रकार वर्णिले आहेत. या पुस्तकासंबंधीं अशी आख्यायिका सांगण्यांत येते कीं, भास्कराचार्यानें हें पुस्तक आपली कन्या जी लीलावती तिला गणित शिकविण्यासाठीं लिहिलें. लीलावती ही भास्कराचार्यांची बायको असावी असेंही त्यासंबंधींच्या आख्यायिकांवरून वाटतें.

---

† अष्टौ व्याकरणानि षट् च भिषजां व्याचष्ट ताः संहिताः ।
षट् तर्कान् गणितानि पञ्च चतुरो वेदानधीते स्म यः ।
रत्नानां त्रितयं द्वयं च बुबुधे मीमांसयोरन्तरं ।
सद्ब्रह्मैकमगाधबोध–महिमा सोऽस्याः कविर्भास्करः ॥

आख्यायिका १ :

पुस्तकाच्या मुखपृष्ठावर जें चित्र मुंबईचे कुशल चित्रकार श्री. मुळगांवकर यांनीं रेखाटलें आहे त्यांत लीलावती हातांत धूळपाटी घेऊन आपल्या वडिलांजवळ अंकगणित शिकावयास बसली आहे व आपल्या ग्रंथाचें एक पान हातांत घेऊन श्रीभास्कराचार्य तिला शिकवीत आहेत असें दाखविलें आहे. यासंबंधीं पुढें दिलेली गोष्ट सांगतात.

लीलावती ही भास्कराचार्यांची एकुलती एक मुलगी. ती ज्यावेळीं उपवर झाली (त्या काळास अनुसरून ८–१० वर्षांची) त्यावेळेस भास्कराचार्यांनीं स्वतःच तिची कुण्डली पुढें ठेवून तिचा विवाहयोग कसा आहे त्याचें भविष्य पाहिलें. तेव्हां त्यांस असें दिसून आलें कीं लीलावतीला वैधव्य येणार आहे व लग्न झाल्यानंतर एक दोन वर्षांतच तिचा नवरा मरणार आहे. फक्त एका विशिष्ट मुहूर्तावर जर तिचें लग्न लागेल तर मात्र ती विधवा होणार नाहीं.

अशा रीतीनें तिचें भविष्य दिसून येतांच ज्या मुहूर्तावर वैधव्ययोग टळत होता त्या मुहूर्तावर तिचें लग्न होईल अशा बेतानें त्यानें तिचा विवाह निश्चित केला. पण विधिघटना निराळीच होती. लग्नाच्या दिवशीं लीलावती गौरीहारपूजनास बसली असतां शेजारींच घटिकापात्र ठेवलेलें होतें. लीलावतीला तें पात्र पाण्यांत बरोबर बुडत आहे कीं नाहीं हें पाहाण्याची अनिवार इच्छा झाली. त्यासरशीं हलकेच उठून ती घटिकापात्राजवळ गेली व त्यांत डोकावून पाहूं लागली. कर्मयोग असा कीं तिच्या कपाळास ज्या कुंकुममिश्रित अक्षता लावलेल्या होत्या .त्यांतला एक तांदुळाचा दाणा टपकन् घटिकापात्रांत पडला. दाणा जड असल्यानें तो थेट तळाशीं जाऊन बसला व घटकेंत येणारें पाणी कमी वेगानें येऊं लागलें. याचा व्हायचा तोच परिणाम झाला. लग्नवेला चुकली व जो मुहूर्त साधण्यासाठीं भास्कराचार्यांची एवढी धडपड चालली होती तो साधला नाहीं. पुढें एक दोन वर्षांतच लीलावती पतिहीन झाली. तिला भास्कराचार्यांनें परत आणली व तिचें आयुष्य फुकट जाऊं नये म्हणून तिला सर्व प्रकारचें गणित शिकविलें.

कोणी असेंही म्हणतात कीं, मुलीच्या कुंडलीची परीक्षा केल्यानंतर ज्या वेळीं भास्कराचार्यास असें दिसलें कीं, मुलीच्या कपाळाचें वैधव्य कांहीं केल्या चुकत नाहीं त्यावेळीं त्यानें मुलीचें लग्नच करावयाचें नाहीं असा निश्चय केला व तिला आजन्म कुंवार ठेवली. पण अशा स्थितींत कांहींतरी व्यवसाय पाहिजे, म्हणून तिला गणितशास्त्र शिकविलें.

आख्यायिका २ :

कोणी म्हणतात लीलावती ही भास्कराचार्यांची स्त्री होती. लग्न झाल्यापासून कित्येक वर्षांपर्यंत तिला मूलबाळ झालें नाहीं. तिचा रोजचा वेळ कंटाळवाणा जाऊं लागला, तेव्हां तिच्या मनाला कांहींतरी विरंगुळा वाटावा म्हणून भास्कराचार्यांनें तिला गणितविद्या शिकविली.

आख्यायिका ३ :

भास्कराचार्य ज्या गुरुजवळ अध्ययन करीत असे त्याची लीलावती ही एकुलती एक कन्या. भास्कराचार्य गुरुगृहीं शिकत असतां त्याची तैलबुद्धि, उमदा स्वभाव, सुंदर शरीरयष्टि, हजरजबाबीपणा, काव्यशक्ति इत्यादि गुण पाहून लीलावतीचें त्याच्यावर प्रेम बसलें. लीलावतीच्या वडिलांसही तिची निवड पसंत होती. भास्कराचार्यांचें शिक्षण संपून तो ज्यावेळीं स्वगृहीं परत जाण्यास निघाला तेव्हां लीलावतीनें त्याला आपला मनोदय सांगितला. भास्कराचार्यालाही ती मनापासून आवडत होती. पण ती पडली गुरुकन्या. म्हणजे ती भास्कराचार्यांची गुरुभगिनी झाली. शास्त्राप्रमाणें बहिणीशीं लग्न करतां येत नाहीं. त्यामुळें भास्कराचार्यास नाइलाजानें नकार द्यावा लागला. तथापि त्यानें तिला असें सांगितलें कीं, "तुझें स्मरण मला आमरण राहील व तुला विसरूं नये म्हणून जो ग्रंथ मी प्रथम लिहीन त्याला तुझेंच नांव देईन."

वर दिलेल्या तिन्ही आख्यायिकांतली खरी कोणती व खोटी कोणती याची शहानिशा करण्यापासून तादृश फायदा नाहीं. भास्कराचार्यांस मुलें

नव्हती व म्हणून त्यानें आपल्या पत्नीस गणित शिकविलें ही गोष्ट आतां खोटी ठरली आहे. कारण त्याला मुलगा होता हें आपण मागेंच पाहिलें आहे. तथापि अपत्यहीन स्त्रीला केवळ वेळ जावा म्हणून गणितासारखा क्लिष्ट विषय शिकविण्याइतका भास्कराचार्य खासच अरसिक नव्हता. शिवाय बरींच वर्षे जिला मूल झालें नाहीं अशा स्त्रीचें वय ३०-३५ तरी भरलेंच पाहिजे. तिला शिकवितांना बाले, बालकुरंगलोलनयने, अशा प्रकारें भास्कराचार्य आवाहन करणार नाहीं.

तिसरी आख्यायिका नाट्यविषय होण्याला विद्याहरण नाटकाइतकीच पात्र आहे. व कच-देवयानीप्रमाणेंच भास्कर-लीलावती असें नाटकही त्यावर बसवितां येईल. तथापि भास्कराचार्य ज्याअर्थी सर्व शास्त्रें आपल्या वडिलांजवळ शिकला असें तो स्वतः म्हणतो त्या अर्थी त्याला दुसऱ्या गुरूच्या घरीं विद्या शिकण्यासाठीं जावें लागलें हें खरें दिसत नाहीं. राहतां राहिली पहिली. ती पुष्कळांशीं खरी असण्याचा संभव आहे. पण त्यांतल्या उत्तरार्धांत भास्कराचार्यानें मुलीचें लग्न न करतां तिला कुंवार ठेवली असा जो पर्याय दिलेला आहे तो भास्कराचार्याच्या एकंदर स्वभावाशीं विसंगत वाटतो. आमच्या मतें जर यांतली कोठली तरी एक आख्यायिका खरी असेल तर ती पहिलीच. अर्थात् भास्कराचार्यांच्या लीलावती ग्रंथांत चार-दोन श्लोकांखेरीज इतर सर्व ठिकाणीं संबोधनात्मक शब्द जे आले आहेत त्यांत सखे, वत्स, गणक अशीं पुल्लिंगीं संबोधनेंच खूप आहेत. यावरून असें दिसतें कीं, जरी आरंभीं एक-दोन ठिकाणीं बाले, लीलावती असे प्रयोग असले तरी पुढें कोठेंच बीजगणित, गणिताध्याय, गोलाध्याय यांत हे शब्द नाहींत. मग अंकगणितांतले पहिले दोन-चार नियम शिकता-शिकतांच लीलावती कंटाळली कीं काय ?

सारांश या दंतकथाच असाव्या. त्यांतलें सत्य इतकेंच कीं, भास्करा-चार्यानें आपल्या पहिल्या ग्रंथास लीलावती हें नांव दिलें आहे. कै. शं. बा. दीक्षित यांनीं आपल्या 'भारतीय ज्योतिःशास्त्र' या ग्रंथांत या दंत-

कथांचा उल्लेख देखील केला नाहीं. कांहीं पाश्चात्य लेखकांनीं तुरळक उल्लेख केला आहे.

लीलावतीचें अंतरंग :

भास्कराचार्यांची लीलावती इतकी प्रसिद्धीला येण्याचें कारण अंकगणितावर लिहिलेलें पद्धतशीर पुस्तक असें तेंच पहिलें होय. भास्कराचार्यांच्या अगोदर पुष्कळ लेखकांनीं अंकगणितावर पुस्तकें लिहिलीं होतीं. पण त्यांना जी लोकप्रियता मिळाली नाहीं ती लीलावतीला लाभली. केवळ भारतांतच नव्हे तर परदेशांतही लीलावती सर्वांना माहीत आहे. सनातन गणिताचा प्रथम सोपान म्हणजेच लीलावती. लीलावतीच्या पूर्वी श्रीधराची 'त्रिशतिका' व महावीराचें 'गणितसारसंग्रह' अशीं दोन पुस्तकें अंकगणित अथवा पाटीगणित या विषयावर होतीच. तथापि त्यांतला उत्कृष्ट भाग घेऊन व कांहीं नवीन प्रकरणें घालून लीलावतीची रचना झालेली आहे. लीलावतींत खालील विषय आहेत—परिभाषा, धान्यादिकांचीं मापें, संख्यास्थानें, बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार, वर्ग, घन व मूळें, अपूर्णांक, शून्यपरिकर्माष्टक, त्रैराशिकें, मिश्रणें, सुवर्णगणित, श्रेढि, त्रिकोणाच्या बाजू काढणें, क्षेत्रफळ, घनफळ, छाया-व्यवहार, कुट्टकें, अंकपाश वगैरे अनेक प्रकरणें आहेत. यांतील निरनिराळे विषय पाहातां भास्कराचार्यानें आजचें अंकगणित, भूमिति, त्रिकोणमिति, महत्त्वमापन व कांहीं बीजगणित या सर्वांचा अंतर्भाव पाटीगणितांत केला आहे असें दिसतें. तसेंच ज्यांना ज्यांना ज्योतिःशास्त्र शिकावयाचें आहे त्या सर्वांनीं प्रथमतः लीलावती आत्मसात् केली पाहिजे असें तो म्हणतो.‡ म्हणजे ज्योतिःशास्त्राचें पायाभूत जें गणित तें सर्व एकत्र शिकतां यावें अशी

---

‡ तस्माद्यो गणितं न वेत्ति स कथं गोलादिकं ज्ञास्यति । गोलप्रशंसा ६
गोलं श्रोतुं यदि तव मतिर्भास्करीयं शृणु त्वम् ।
लीलागम्यः सुललितपदः प्रश्नरम्यः स यस्मात् ॥ गोलप्रशंसा ९

शेष या लीलावतींत आहे. लीलावती ग्रंथाच्या योग्यतेविषयीं भास्कराचार्य स्वतः सांगतात कीं,

" येषां सुजातिगुणवर्गविभूषितांगी ।
शुद्धाखिलव्यवहृतिः खलु कण्ठसक्ता ।
लीलावतीह सरसोक्तिमुदाहरन्ती ।
तेषां सदैव सुखसम्पदुपैति वृद्धिम् ॥ "

म्हणजे गुणाकार, जाति, वर्ग वगैरे प्रकरणांनीं व क्षेत्रव्यहार वगैरेंनीं विभूषित अशी व उत्तम उत्तम उदाहरणें जिच्यांत आहेत अशी ही लीलावती ज्यांना तोंडपाठ येत असेल त्यांचें सुख व संपत्ति वाढतील यांत काय संशय? हा श्लोक द्व्यर्थी आहे. दुसरा अर्थ असा कीं, शुद्ध कुळांत जन्मास आलेली सद्गुणी, व्यवहारांत हुशार, मधुर भाषणी लीलावती ज्यास अलिंगन देईल (म्हणजे ज्याच्याशीं विवाहबद्ध होईल) त्याच्या सुख व संपत्तीची वाढ करील यांत काय संशय! एकेपरी ही लीलावती ग्रंथिका भास्कराचार्यांची मानसकन्या मानली तर भास्कराचार्यांनें तिचा विवाहच या श्लोकरूपानें लावला आहे असें म्हणावयास हरकत नाहीं. स्वतः भास्कराचार्यालाही शिरोमणि ग्रंथातला हा प्रथमभाग अत्यंत प्रिय असावा असें दिसतें. कारण कविकल्पनेच्या भराऱ्या लीलावतींत जितक्या आढळतात तितक्या बीजगणित, गणिताध्याय व गोलाध्याय यांत आढळत नाहींत.

लीलावतीचीं भाषांतरें :

बाराव्या शतकाच्या मध्यापासून तों पुढें ५०० वर्षेपर्यंत हिंदुस्थानांत सगळीकडे लीलावतीवरून अंकगणित शिकवीत असत. इतर लेखकांचीं पुस्तकें लीलावतीपुढें हतप्रभ झालीं होतीं असें म्हणावयास प्रत्यवाय नाहीं ग्रंथाची योग्यता ठरविण्याचें पहिलें गमक म्हणजे त्याची होणारीं भाषांतरें. लीलावतीला हें भाग्य लाभलें. लीलावतीचें भाषांतर इ. स. १५८३ फैजी या फारसी कवीनें अकबराच्या आज्ञेवरून फारसी भाषेंत केलें.

जेम्स टेलर यानें सन १८१६ त लीलावतीला इंग्रजी वेष चढविला. तसेंच प्रसिद्ध इंग्रजी ज्योतिषी हेन्री टॉमस कोलब्रुक यांनीं इ. स. १८१७ त स्वतःच लीलावतीचें इंग्रजी भाषांतर केलें. मराठींत लीलावतीचें भाषांतर दोनच गृहस्थांनीं केलें आहे असें दिसतें. इ. स. १८९७त विनायक पांडुरंग खानापूरकर यांनीं व इ. स. १८८९त देवराव उरवाशेट एरंडोलकर यांनी मराठी टीकेसह लीलावती छापविली होती. हिंदींतही लीलावतीचीं पुष्कळच भाषांतरें झालेलीं दिसतात. कै. पंडित सुधाकर द्विवेदी व पंडित रामस्वरूप शर्मा यांनीं हिंदी टीकायुक्त भाषांतरें केलीं आहेत. इतर भाषांतूनही अशींच भाषांतरें झालीं असलीं पाहिजेत. मराठींत कोणी लेखकानें समश्लोकी भाषांतर अद्याप केलेलें दिसत नाहीं. तें करणें सोपें नाहीं हीहि गोष्ट खरीच!

लीलावतीवरील टीकाग्रंथ :

वाचकांच्या लक्षांत आलेंच असेल कीं, पूर्वीं बहुतेक संस्कृत ग्रंथ काव्य-रूपांत त्रोटक रीतीनें लिहिलेले असल्यामुळें अभ्यासून समजण्यास अवघड होत असत. त्यामुळें ग्रंथ शिकविणारे शास्त्री आपली टीका (ही पण संस्कृतांतच असे) त्या ग्रंथाबरोबरच विद्यार्थ्यांस शिकवीत. हल्लीं आपण ज्या अर्थानें टीकाकार शब्द वापरतों त्या अर्थानें पुस्तकाच्या गुणदोषांवर पूर्वींचे टीकाकार टीका करीत नसत. पुस्तकांतील विषय सुस्पष्ट व्हावा म्हणून त्यांतील श्लोकांचें विशदीकरण या बहुतेक टीकांतून केलेलें असे. लीलावतीवर कमींत कमी १७ ते २० टीकाग्रंथ झाले आहेत. त्या सर्वांची नामावली येथें देण्यांत अर्थ नाहीं. त्यांत गणेश दैवज्ञाची 'बुद्धि विलासिनी' (१५४५ स.), गंगाधराची गणितामृतसागरी (१४३२), सूर्यदासाची 'गणितामृत कुपिका' (१५४१) व इतर अनेक आहेत. या सर्व संस्कृतांत आहेत. स्वतः भास्कराचार्यानें आपल्या ग्रंथांत श्लोकांचें स्पष्टीकरण दिलेलें आहे.

वाचकांना ठाऊक असेलच कीं पूर्वीं ग्रंथांच्या प्रती भूर्जपत्रावर किंवा जाड (एरंडोली) कागदावर करीत असत. लीलावतीच्या अशा अनेक

प्रती काश्मीरपासून कन्याकुमारीपर्यंत अभ्यासूंनीं केलेल्या होत्या. जे पाश्चात्य प्रवासी व संशोधक हिंदुस्थानांत शें दोनशें वर्षांत येऊन गेले त्यांनीं भूर्जपत्रावर लिहिलेल्या कांहीं पुस्तकांच्या प्रती इकडून युरोप खंडांत नेल्या. त्यांत आर्यभटाचें आर्यभटीय, लीलावती वगैरे पुस्तकांच्या प्रती नेल्या. दुःखाची गोष्ट अशी कीं स्वतः भास्कराचार्यानें लिहिलेला मूळ ग्रंथ (त्याचें स्वतःचें हस्तलिखित) अद्याप सांपडलेलें नाहीं. आमच्या मौलिक वस्तूंचें जतन आपणांस नीट करतां येत नाहीं हेंच खरें !

लीलावतींतील कांहीं विषय :

मागें लीलावतींतल्या वर्ण्य विषयांची एक यादी दिली. तिच्यांतल्या कांहीं गोष्टींचा आतां परामर्श घेऊं.

भास्कराचार्यानें गुणाकार करण्याच्या पांच सहा रीति दाखविलेल्या आहेत. त्या प्रत्येकींत निरनिराळें तत्त्व अवलंबून त्याप्रमाणें गुणाकार करून दाखविले आहेत. भास्कराचार्य लीलावतीस विचारतो : हे हरिणाक्षी, लीलावती, १३५ आणि १२ यांचा गुणाकार किती होतो तो रूपस्थानविभागखंड या प्रकारच्या रीतींनीं करून दाखव. $ लीलावतीच्या टीकाकारांनीं एकंदर ८ प्रकारच्या रीती दाखविल्या आहेत. त्या अशा :

रीत १ ली : साधा गुणाकार

```
  १३५
 ×१२
 ----
 १६२०
```

येथें १२ नें प्रथम पांचास गुणून ६० आले. त्यांतलें ० एकं स्थानीं लिहून ६ हातचे धरले. नंतर बारा त्रिक छत्तीस यांत सहा मिळविले व ४२ बेरजेंतले २ दहं स्थानीं लिहून ४ हातचे ठेवले. याप्रमाणेंच पुढें केलें.

$ बाले बालकुरङ्गलोलनयने लीलावति प्रोच्यताम् ।
पञ्चत्र्येकमिता दिवाकरगुणा अङ्काः कति स्युर्यदि ।
रूपस्थानविभागखण्डगुणने कल्पासि कल्याणिनि । लीलावती २

रीत २ री : गुणकाचे रूपविभाग करावे. उदाहरणार्थ १२ = ८ + ४.

१३५	१३५	१०८०	१३५ स ८ व ४ यांनीं निरनिराळे गुणावें.
× ८	× ४	+ ५४०	व येणाऱ्या गुणाकारांची बेरीज करावी.
१०८०	५४०	१६२०	

रीत ३ री : गुणकाचे दोन अवयव पाडावे. उदाहरणार्थ १२ = ४ × ३. प्रथम संख्येस ४ नें गुणावें व नंतर ३ नें गुणावें.

१३५ × ४ = ५४०, ५४० × ३ = १६२०.

रीत ४ थी : गुणकाचे स्थानविभाग करावे. अर्थात् १२ बरोबर एकावर दोन. १३५ नें १ व २ यांना निरनिराळें गुणून एकाखालीं एक लिहून बेरीज करावी.

१३१	१३५	१३५
× १	× २	+ २७०
१३५	२७०	१६२०

रीत ५ वी : गुणकांतून असा एक अंक वजा करावा कीं उरलेल्यास गुण्यानें सहज गुणतां येईल. म्हणजे १२ = १० + २.

∴ १३५ × १२ = १३५ × १० + १३५ × २ =

१३५० + २७० = १६२०.

रीत ६ वी : गुणकांत असा अंक मिळवावा कीं नवीन गुणक सोपा होईल. येथें १२ = २० − ८.

∴ १३५ × १२ = १३५ × २० − १३५ × ८ =

२७०० − १०८० = १६२०.

रीत ७ वी : या रीतीस कपाट-संधि असें म्हणतात. स्वतः भास्कराचार्यांनीं ही रीत दिलेली असली तरी तिचें नांव दिलेलें नाहीं. टीकाकारांनीं तिचें स्पष्टीकरण केलेलें आहे. कपाटसंधि म्हणजे दाराच्या दोन फळ्यांचा जोड. जशी दाराचीं दोन्हीं कवाडें मिटलीं म्हणजे एकमेकांस चिकटतात

त्या दोन्ही (ज्यांचा गुणाकार करावयाचा त्या) संख्या अशा एकाखालीं एक लिहाव्या कीं गुण्याच्या एकंस्थानचा अंक हा गुणकाच्या अंतिमस्थानच्या अंकाखालीं येईल. उदाहरणार्थ पाटीवर

 १२
१३५

असें लिहावें. येथें १२ गुणक व १३५ गुण्य. ५ चा २ शीं गुणाकार १० होतो. त्यांतलें शून्य दोहोंखालीं लिहावें व ५ × १ = ५ त्यांत एक मिळवून ६ होतात. हे सहा ५ पुसून त्या ठिकाणीं लिहावे. म्हणजे पाटीवर आंकडे असे दिसतील.

 १२
१३६०.

नंतर गुणक १२ एक घर डाव्या बाजूस सरकवावा. म्हणजे आंकडे

१२
१३६०.

असे दिसतील. आतां १ च्या खालीं तीन आले. ३ नें २ स गुणून येणारे ६ खालच्या सहांत मिळवावे. म्हणजे तेथें २ येतील. हातचा एक ३ × १ = ३ यांत मिळवून तीन पुसावे व तेथें येणारी बेरीज ४ लिहावी. म्हणजे संख्या अशी दिसेल.

१२
१४२०.

गुणक १२ पुन्हां एक घर डाव्या बाजूस सरकवावा. म्हणजे आंकडे असे दिसतील.

१२
१४२०.

आतां वरच्या एकाखालीं जो १ आहे. त्यानें दोहोंस गुणून येणारे दोन ४ त मिळवून ४ पुसून तेथें ६ लिहावे. नंतर १ × १ = १ तो पहिला १ पुसून त्या जागीं लिहावा. म्हणजे

१२
१६२०

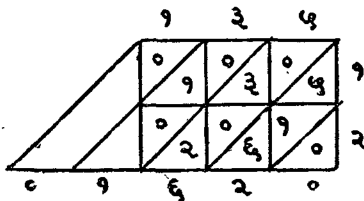
असें दिसेल. १६२० हा गुणाकार होय. या रीतीचें वर्णन करण्यास जितका वेळ लागला त्याच्या दहावा हिस्सा वेळ ही गुणाकार करण्यास लागत नाहीं. तसेंच प्रत्येक वेळीं वरची संख्या सरकवून खालच्या गुणकाशीं उभ्या रेषेंत येईल अशी लावावी लागते, म्हणून यांस कपाट-संधि असें म्हणतात.

वाचकांच्या लक्षांत येईलच कीं लीलावतीच्या काळीं व त्यानंतर कित्येक वर्षे (दगडीपाट्या येईपर्यंत) मुलें धूळपाटीवर काडीनें गुणाकार-भागाकार

करीत. पाटीवर म्हणजेच लाकडाच्या फळीवर विटकरीचा बारीक भुगा किंवा रेती पसरून पाटी तयार करीत असत. अर्थात् पाटीवर शक्य तितके थोडे अंक लिहिणें जरूर असे. म्हणजेच कांहीं अंक पुसून त्या जागीं दुसरे लिहिणें हाच एक काटकसरीचा मार्ग होता. त्या दृष्टीनें कपाटसंधि रीतीचा उपयोग भास्कराचार्यांच्या पूर्वीं ३–४ शतकें होत होता असें दिसतें.

लीलावतीवर गणेश दैवज्ञानें बुद्धिविलासिनी नावांची टीका केली आहे. तिच्यांत आणखी एका रीतीचा उल्लेख आहे. गणेश दैवज्ञ म्हणतो– " तिरप्या दिशेनें चौकटींतल्या विभक्त गुणाकारांतील अंकांची बेरीज करावी म्हणजे गुणाकार मिळेल. " † या रीतीला आपण ' यथाकोष्ठ रीत ' असें नांव देऊं. हिंदींत हिला जरबकोठडी असें म्हणतात व अरबी भाषेंत ' शद्दाबका ' असें नांव आहे. ही रीत पुढें दिली आहे.

गुणकांत जितके अंक असतील तितक्या उभ्या घरांचा व गुण्यांत असतील तितक्या आडव्या घरांचा एक चौकोन करा. चौकोनाच्या वर गुण्य लिहा. चौकोनाच्या उजव्या बाजूस वरून खालीं गुणक लिहा. नंतर १ नें ५ ला गुणा. गुणाकार एकांकीं आहे. म्हणून कर्णानें १ त्या ओळींतल्या उजवी-



कडच्या घराचें जे दोन भाग झाले त्यांत ५ व ० आकृतींतल्या प्रमाणें लिहा. असेच सर्व स्थानीय गुणाकार लिहा. दुसऱ्या ओळींत २ × ५ = १० गुणाकार आला. त्यांतला एकंचा अंक ० कर्णाखालीं व दहंचा अंक १ कर्णाच्या वर असे लिहिले. याचप्रमाणें इतर गुणाकारांचें केलें. नंतर बेरीज करतांना दोन समांतर कर्णांच्या मध्यें आलेल्या आंकड्यांची बेरीज केली. ती आकृतींत दाखविली आहे. या रीतीनें केलेल्या गुणाकारांत चूक

† तिर्यग्गत्या यथाकोष्ठं संयोज्य जातं तदेव १६२०.

होण्याचा संभव कमी असल्यानें इंग्लंडांतले १७ व्या शतकांतले प्रसिद्ध गणिती सर जॉन नेपियर हे हीच रीत वापरीत असत. ही रीत मूळची अरबी लोकांची असावी असें इतिहासज्ञ म्हणतात.

भास्कराचार्य ज्यास इष्टकर्म म्हणतात त्यातलें एक उदाहरण पाहा—(या प्रकारास विश्लेषजाति असें नांव आहे.)

उदाहरण—भुंग्यांचा एक कळप होता. त्याचा पांचवा भाग कदंब वृक्षावर उडून गेला. तिसरा हिस्सा भुंगे सिलींध्र वृक्षावर उडाले. $(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})\times 3$ इतके कुड्याच्या झाडावर गेले. व एक भ्रमर तेथें उरला तर एकंदर भुंगे किती ? $ हें उदाहरण सोपें असल्यानें त्याची रीत सांगण्यांत स्वारस्य नाहीं. परंतु उदाहरणें रचतांनाहि काव्यांत वारंवार येणाऱ्या वस्तु आणि कल्पना यांचा उपयोग भास्कराचार्यांनें कसा केला तें पाहाण्यासारखें आहे. एखाद्या प्रश्नांत हत्तींचा कळप सरोवरांत क्रीडा करतांना आढळतो तर कोठें हंस सरोवराच्या तीरावर खेळत आहेत. एखाद्या उदाहरणांत भाविक यात्रेकरू चार धामांच्या यात्रा करीत आहे तर एकांत एक प्रवासी उंटांच्या काफिल्याबरोबर प्रवास करीत आहे. संध्याकाळीं एका गांवाजवळ तो काफिला मुक्काम करतो. प्रवाशास भूक लागलेली असते. तो घाईघाईनें गांवांत जातो व वाणीदादास म्हणतो, ‘ महाराज झटपट मला मूग व तांदूळ १:२ या प्रमाणांत $\frac{१३}{६४}$ द्रम्म किंमतीचे द्या. उशीर करूं नका. मला अजून खिचडी तयार करून जेवायचे आहे नि उशीर झाला तर कारवान तसाच पुढें निघून जाईल अन् मी मात्र मागें राहीन. ’ ‡

एका प्रश्नांत चंदन व कापूर यांपासून धूप करण्याबद्दल पैसे किती पडतील याची विचारणा आहे. एकांत १० आंब्यांबद्दल किती डाळिंबें

$ लीलावती, आनंदाश्रम प्रत, ५५

‡ लीलावती, ,, ,, ९९

मिळतील हें विचारलें आहे. एका उदाहरणांत प्रियकरानें आपल्या प्रेयसीला मोत्यांचे दागिने करून दिले आहेत; तर दुसऱ्या एकांत स्त्रीच्या गळ्यांतील मुक्ताहार तुटला त्यांतल्या मोत्यांची संख्या विचारलेली आहे.

व्यस्त त्रैराशिकावर भास्कराचार्य खालील प्रश्न विचारतो—

" प्राप्नोति चेत्षोडशवत्सरा स्त्री द्वात्रिंशतं विंशतिवत्सरा किम् ।
द्विधूर्वहो निष्कचतुष्कमुक्षा प्राप्नोति धूःषट्कवहस्तदा किम् ॥ "

म्हणजेः—जर १६ वर्षांची स्त्री ३२ रुपयांत (विकत) मिळते तर २० वर्षांच्या स्त्रीला काय किंमत पडेल ? वाचकांना वाटेल कीं सरळ हिशेबानें ४० रुपये पडतील. पण तसें नाहीं. हें त्रैराशिक व्यस्त आहे. १६ वर्षांची गुलाम स्त्री (पण्यांगना) ही सर्वांत अधिक मोलाची आहे व जसजसे वय वाढेल तशी तिची किंमत कमी होईल. दुसऱ्या ओळींत असा प्रश्न आहे. जर बैलांची जोडी एक जोखड ओढील अशा बैलास ४ निष्क पडतात, तर तेंच जोखड ओढण्यास ६ बैल लागले तर प्रत्येक बैलास काय द्यावें ?

भास्कराचार्यांच्या लीलावतींतलें एक उदाहरण वाचकांनीं कोडें म्हणून सोडवून पाहावें. त्याचा संस्कृत श्लोक न देतां फक्त भावार्थ देतों—

चार व्यापारी प्रवास करीत करीत एका शहराकडे जात होते. एकाजवळ ८ माणकें, दुसऱ्याजवळ १० इंद्रनील, तिसऱ्याजवळ १०० मोत्यें व चौथ्याजवळ ५ हिरे होते. त्यांच्यापैकीं प्रत्येकानें आपल्याजवळचें एकेक रत्न आपल्या प्रत्येक सोबत्यास दिलें. याप्रमाणें प्रत्येकानें केल्यानंतर असें दिसलें कीं ते चौघेही तुल्यधन झाले. तर प्रत्येक प्रकारच्या रत्नाची किंमत काय ? ¶

¶ माणिक्याष्टकमिन्द्रनीलदशकं मुक्ताफलानां शतम् ।
सद्वज्राणि च पञ्च रत्नवणिजामेषां चतुर्णां धनम् ।
संगस्नेहवशेन ते निजधनाद्दत्त्वैकमेकं मिथो ।
जातास्तुल्यधनाः पृथग्वदसखे तद्रत्नमूल्यानि मे ॥ लीलावती

रीत (अंकगणितानें) ज्या अर्थी प्रत्येकानें आपल्या जवळचीं तीन रत्नें इतरांपैकीं प्रत्येकास एक एक याप्रमाणें वाटलीं त्या अर्थी विनिमय झाल्यावर

पहिल्याजवळ ५ माणकें १ इंद्रनील १ मोत्यें व १ हिरा राहिला.
दुसऱ्याजवळ १ माणिक ७ इंद्रनील १ मोत्यें व १ हिरा „
तिसऱ्याजवळ १ माणिक १ इंद्रनील १७ मोत्यें व १ हिरा „
चौथ्याजवळ १ माणिक १ इंद्रनील १ मोत्यें व २ हिरे राहिले.

आतां हे चौघे समधन आहेत. व प्रत्येकाजवळ प्रत्येक प्रकारचें एकेक रत्न आहेच. म्हणजेच उरलेलीं रत्नें सारख्या किंमतीचीं असलीं पाहिजेत, ∴ ४ माणकें = ६ इंद्र = १६ मोत्यें = १ हिरा. समजा मोत्याची किंमत १ रुपया तर माणिक २४ रु. इंद्रनील १६ रु. व हिरा ९६ रु. अशा किंमती झाल्या.

यापुढें क्षेत्रफळ, घनफळ, क्रकच व्यवहार वगैरे प्रकरणें आहेत. त्यांतलें वर्तुळाचे प्रश्न वाचकास समजण्यासारखे आहेत. त्यांतल्या एका महत्त्वाच्या प्रश्नाकडे वळूं. पहिल्या प्रकरणांत सांगितलें होतें कीं आर्यभटाचा गोलाच्या घनफळासंबंधींचा नियम चुकीचा होता. आर्यभटाचा शिष्य लल्ल यानें तर गोलाचें पृष्ठफळ काढण्याचें सूत्र देखील चुकीचेंच दिलें आहे. भास्कराचार्यानें हीं दोन्हीं सूत्रें बरोबर दिलेलीं असून लल्लानें चुकीचीं सूत्रें दिल्याबद्दल त्याची खूप हजेरी घेतली आहे. त्यावरून भास्कराचार्यांचा आत्मविश्वास व सूक्ष्मावलोकन शक्ति या दोहोंचा प्रत्यय येतो. पूर्वीच्या काळीं मोठमोठ्या ज्ञानी लोकांत जसे वादविवाद होत तसाच प्रकार येथेंही झाला आहे. त्याचा नमुना म्हणून गोलाध्यायाच्या तिसऱ्या विभागांतील ५३–६१ श्लोकांचा भावार्थ सांगतों.

लल्लाच्या सूत्राचें खंडन :

भास्कराचार्य म्हणतो, “ लल्लानें गोलाचें पृष्ठफळ (जसें टेनिसच्या

चेंडूवर शिवलेल्या कापडाचें क्षेत्रफळ) काढण्याचें सूत्र अतिशय चुकीचें दिलें आहे. त्याच्या रीतीनें काढलेलें क्षेत्रफळ हें खऱ्या क्षेत्रफळाशीं ताडून पाहातां उत्तर शतांशानें देखील बरोबर येत नाहीं. जें उत्तर प्रत्यक्ष अनुभवाच्या विरुद्ध आहे तें बरोबर आहे असें सांगणें हे उद्धटपणाचें नाहीं काय ? मीं दिलेलें सूत्र बरोबर आहे. तेव्हां प्रौढ गणकांनों, कोणाचें सूत्र बरोबर हें तुम्हीच निःपक्षपातीपणानें ठरवा. पण शंका राहूं नये म्हणून एक व्यवहारी रीत तुम्हांला सांगतों.

गोलपृष्ठासाठीं प्रात्यक्षिक रीत :

ज्या गोलाचें पृष्ठफळ काढणें असेल त्याच्या परिघार्धाएवढा व्यास धरून कापडावर एक वर्तुळ काढा. कात्रीनें कापड वर्तुळाकार कापा. व त्या गोलावर चढवा. म्हणजे अर्धा गोल झांकला जाईल व कापड थोडें वर उरेल. आतां या कापडाचें क्षेत्रफळ

$$\pi \times \left(\frac{\pi \times \text{त्रि}}{२}\right)^{२} = \frac{\pi^{२}}{४} \cdot \pi\, \text{त्रि}^{२} \quad \text{आतां } \pi^{२} = ९{\cdot}८५९६.$$

$\therefore \frac{\pi^{२}}{४} = २{\cdot}५$ जवळजवळ. असे कापडाचे दोन तुकडे सबंध गोल झांकतील.

म्हणजे गोलाचें पृष्ठफळ वर्तुळाच्या क्षेत्राच्या पांचपटीपेक्षां कमीच होईल. पण लल्ल म्हणतो कीं वर्तुळाच्या क्षेत्रास त्याच्या परिधीनें गुणावें. (म्हणजे परिधि पांचपेक्षां जास्त असला तर उत्तर चुकलेंच.) मग लल्लानें हा चुकीचा नियम कुठून घेतला ? लल्लाचें सूत्रच दुष्ट झाल्यामुळें त्यानें पृथ्वीच्या पृष्ठाचें मानही चुकीचेंच दिलें आहे. पण असें तरी कां ? गोलाचें पृष्ठफळ नक्की कसें काढावें तेंही मी दाखवितों. ज्या गोलाचें पृष्ठफळ काढावयाचें असेल त्याच्या विषुववृत्ताचे ९६ भाग करावे. नंतर त्याचे उत्तर व दक्षिणबिंदु जोडणारीं रेखांशवृत्तें काढावीं. म्हणजे आंवळ्यावर ज्याप्रकारें रेघा दिसतात व त्यांयोगें आंवळ्याच्या आठ फोडी होतात तसे गोलपृष्ठाचे ९६ भाग

होतील. या प्रत्येक भागास पाकळी (वप्र) म्हणूं या. एका वप्राचें क्षेत्रफळ समजलें कीं सर्व गोलाचें क्षेत्रफळ मिळेल. या रीतीनें हिशेब करून गोलपृष्ठ = २ π त्रि × २ त्रि = परिधि × व्यास असें आलें. लल्लाचें सूत्र गोलपृष्ठ = २ π त्रि × π त्रि^{२} हें अर्थातच चूक आहे.

गोलाचें घनफळ सांगतांना भास्कराचार्य म्हणतो—ज्या गोलाचें घनफळ काढावयाचें असेल तेवढ्याच व्यासाची व तेवढ्याच उंचीची एक पंचपात्री घ्या. नंतर त्या गोलाएवढा मातीचा गोळा करून भांड्यांत दाबा. (सोऱ्यांत ज्याप्रमाणें आपण चकलीची भाजणी दाबून भरतों त्याप्रमाणें) म्हणजे आपणांस दिसेल कीं पंचपात्रीचा $\frac{२}{३}$ भाग गोळ्यानें व्यापला आहे. म्हणून गोलाचें घनफळ = $\frac{२}{३}$ × पंचपात्रीचें घनफळ = $\frac{२}{३}$ × २ त्रि × π त्रि.^{2} = $\frac{४}{३}$ π त्रि.^{3}.

भास्कराचार्यांच्या बीजगणिताविषयीं थोडें :

ज्याप्रमाणें लीलावती हा अंकगणितावरचा अप्रतिम प्रबंध आहे त्याच-प्रमाणें 'बीजगणित' हें अव्यक्त गणितावरचें उत्कृष्ट पुस्तक आहे. यांत लीलावतीप्रमाणेंच अनेक विषय आले आहेत. त्या सर्वांचा परामर्श थोड्या जागेंत घेणें शक्य नाहीं. लीलावतीप्रमाणेंच बीजगणितावर अनेक टीका झाल्या. त्यांत कृष्ण दैवज्ञाची नवांकुरा ही फार प्रसिद्ध आहे. हा कृष्ण दैवज्ञ जहांगीर बादशहाच्या पदरीं ज्योतिषी होता. त्यानें ही टीका इ.स. १६१२त केली. बीजगणिताचें फारसी भाषांतर शहाजहान राजाच्या कारकीर्दींत अताउल्ला रसीदी नामक लेखकानें इ. स. १६३४त केलें. इ.स. १८१३त स्ट्राची या नांवाच्या इंग्रज लेखकानें इंग्रजींत त्याचें भाषांतर केलें सूर्यदासानें शके १४६३त भास्कराचार्यांच्या बीजगणितावर टीका लिहिली आहे. पण लीलावतींतलें प्रश्न जितके सामान्य वाचकाच्या कक्षेंत येतात तितके बीजगणितांतले येतील असें वाटत नाहीं. तथापि या ग्रंथांत भास्कराचार्यानें जे विषय हाताळले आहेत त्यांची थोडीशी चुणूक वाचकांना देतों. बीज-गणितांतले कांहीं नियम पाहा.

१—योगे युतिः स्यात् क्षययोः स्वयोर्वा ।
धनर्णयोरन्तरमेव योगः ।

म्हणजे दोन्ही संख्या धन असतील तर त्यांच्या मिलाफानें त्यांची बेरीज होते. दोन्ही ऋण असतील तरीहि मिलाफानें बेरीज होते. पण एक धन व एक ऋण असेल तर त्यांचा फरक म्हणजेच त्यांची बेरीज.

२—स्वयोरस्वयोर्वधः स्वं, स्वर्णघाते क्षयः ।

म्हणजे धन संख्यांचा गुणाकार धन, ऋण संख्यांचा गुणाकार धन, परंतु एक धन व एक ऋण अशा संख्याचा गुणाकार ऋण होतो.

सामान्यतः बीजगणितांत येणारे बहुतेक विषय भास्कराचार्यानें स्पष्ट केले आहेत. त्यांत वर्ग, घन, वर्गमूळ, घनमूळ एकवर्ण समीकरणें, द्विवर्ण व अनेकवर्ण समीकरणें, वर्गप्रकृति व कुट्टकें हे विषय आहेत. अव्यक्त संख्या यावत्, तावत्; या, का; कालिका, नीलिका अशा शब्दांनीं दाखविल्या आहेत. ऋण संख्या एक टिंब संख्येवर लिहून दर्शविल्या आहेत. जसें यां = – या.

लीलावतींतलेच कांहीं प्रश्न बीजपद्धतीनें सोडवून दाखविले आहेत. त्यांतले दोन प्रश्न पहा.

प्रश्न १—अशा दोन संख्या सांगा कीं पहिलीला पांचनें भागल्यास १ बाकी उरते. दुसरीस ६ नें भागल्यास २ बाकी उरते. त्यांच्या बेरजेस ९ नें भागल्यास ५ बाकी उरते. अंतरास ३ नें भागल्यास २ बाकी उरते. पण (६, ८) सोडून दुसरी जोडी सांगा. उत्तर–(६, २६)
पण अशी उत्तरें पुष्कळच येण्याचा संभव आहे.

प्रश्न २—हे कल्याणी, (लीलावती), जर तुला गणित चांगलें येत असेल तर मला पुढील प्रश्नाचें उत्तर सांग. ८ माणकें, १० इंद्रनील व १०० मोत्यें यांना सारखीच किंमत देऊन मी तुझ्या कानांतील आभूषणें तयार केलीं आहेत. यांतील एक माणिक, एक इंद्रनील व एक मोती यांना मिळून जर ४७ रुपये पडतात; तर प्रत्येक रत्नाची किंमत काय ?

रीत–८ माणकांबरोबर १०० मोत्यें .·. १ माणकाबरोबर १२॥ मो.
१० इंद्रनीलांबरोबर १०० मोत्यें .·. १ इंद्रनीलाबरोबर १० मो.
.·. १ मा. + १ इं.+१ मो. = १२॥ + १०+१ मो. = २३॥ मो.
.·. २३॥ मोत्यांना ४७ रुपये अर्थात् १ मोत्यास २ रुपये.
.·. माणिक २५ रुपये, इंद्रनील २० रुपये व मोतीं २ रुपये.

चक्रवालपद्धति–भास्कराचार्यानें जर पाश्चिमात्य गणितज्ञांवर कुठें ताण केली असेल तर ती त्याच्या वर्गप्रकृति या प्रकरणांत होय. इंग्रजींत ज्याला Pell's Equation असें म्हणतात तें व डायोफंटसचीं समीकरणें हीं भास्कराचार्यांचीं कुट्टकें व वर्गप्रकृति यांत अंतर्भूत होतात. नवीन गणितशास्त्रांत या समीकरणांना फार महत्त्व आहे. व गणिताच्या इतिहासकारांनीं हीं सोडविल्याबद्दल भास्कराचार्यांची मुक्तकंठानें स्तुति केली आहे. त्याच्या रीतीस चक्रवालपद्धति असें नांव आहे. साधारण वाचकास समजण्याच्या पलीकडची ही रीत आहे. तथापि प्रश्नाचें व उत्तराचें स्वरूप ध्यानांत यावें म्हणून एक सोपा प्रश्न घेऊं.

अशी कोणती संख्या आहे कीं, जिच्या वर्गाच्या आठपटींत १ मिळविला असतां बेरीज पूर्ण वर्गच होते ?

बीजगणिताच्या भाषेंत $८ क्ष^{२} + १ = य^{२}$ असेल व क्ष, य पूर्णांक असतील तर क्ष व य च्या किंमती सांगा.

आतां $८ क्ष^{२} + १ = य^{२}$ यांकडे पाहिलें असतां असें दिसतें कीं जर क्ष = १ तर य = ३ व जर क्ष = ६ तर $८ \times ३६ + १ = २८९ = य^{२}$.·. य = १७. यांत भास्कराचार्य ८ आंकड्यास प्रकृति असें नांव देतो व क्ष आणि य यांना अनुक्रमें लघु व ज्येष्ठ म्हणतो किंवा ऱ्हस्व व दीर्घ म्हणतो. आतां वरील प्रश्नांचीं दोन उत्तरें आपणांस सांपडलीं. पुढील सर्व उत्तरें चक्रवालपद्धतीनें (सांखळी रीतीनें) आपणांस मिळतात. म्हणजे तीन नंबरचें उत्तर पहिल्या व दुसऱ्या उत्तरावरून, चार नंबरचें पहिल्या व तिसऱ्यावरून, पांच नंबरचें पहिल्या व चौथ्यावरून किंवा दुसऱ्या व तिसऱ्यावरून

मिळतें व पुढाल सर्व उत्तरें पूर्वींच्या उत्तरावर अवलंबून असतात. आतां पहिलें व दुसरें उत्तर काढलें. त्यांतल्या क्षच्या किंमतीस ऱ्हस्व व यच्या किंमतीस दीर्घ म्हणा. व सोबत दाखविल्याप्रमाणें सांखळी तयार करा. ती अशी—

क्षे.	ऱ्हस्व	दीर्घ
८	१	३
	६	१७
	३५	९९
	२०४	५७७
	११८९	३३६३
	६९३०	१९६०१

ऱ्हस्व दीर्घांची वज्राभ्यास बेरीज म्हणजे तिरप्या गुणाकारांची बेरीज हें नवीन ऱ्हस्व. तसेंच ऱ्हस्वांच्या गुणाकारांची आठ पट + दीर्घांचा गुणाकार हें नवीन दीर्घ. या रीतीनें १७ × १ + ६ × ३ = ३५ हें तिसरें ऱ्हस्व, ६ × १ × ८ + १७ × ३ = ९९ हें तिसरें दीर्घ. ३५ × ३ + ९९ × १ = २०४ हें चौथें ऱ्हस्व व ३५ × १ × ८ + ९९ × ३ = ५७७ हें चौथें दीर्घ, या प्रमाणें दोन सांखळ्या तयार होतात. या सांखळ्यांतील संख्यांचें नातें मूळ समीकरणानें व्यक्त होतें. म्हणून $८ \times १^{२} + १ = ३^{२}$, $८ \times ६^{२} + १ = १७^{२}$, $८ \times ३५^{२} + १ = ९९^{२}$, $८ \times २०४^{२} + १ = ५७७^{२}$ याप्रमाणें ही सांखळी अनंत पदांपर्यंत वाढवितां येईल. भास्कराचार्यांचें चक्रवाल तें हेंच.

लेखकाची रीत : वरीलप्रमाणें उत्तरांच्या दोन जोड्या मिळाल्या कीं पुढील जोड्या अशा रीतीनें काढा. दुसऱ्या ऱ्हस्वाच्या ६ पटींतून पहिलें वजा केलें कीं तिसरें ऱ्हस्व येतें. तिसऱ्याच्या सहापटींतून दुसरें उणें केलें कीं चौथें मिळतें. याच रीतीनें पुढील ऱ्हस्वें मिळतात. तसेंच दुसऱ्या दीर्घाच्या सहापटींतून पहिलें दीर्घ वजा केलें कीं तिसरें दीर्घ, तिसऱ्याच्या सहापटींतून दुसरें उणें केलें कीं चौथें दीर्घ याप्रमाणें दीर्घांची सांखळी तयार होते.

या नियमांच्या मागें संख्याशास्त्रांचे जे सिद्धांत आहेत ते सांगण्याचें हें स्थळ नव्हे. पण इतकें मात्र अवश्य सांगावेसें वाटतें कीं युरोपखंडांतल्या गणितज्ञांना ज्या गोष्टी १६ व्या शतकापर्यंत करतां आल्या नाहींत त्या

इ. स. ११५०त भास्कराचार्यानें केल्या. चक्रवाल पद्धतीचीं अनेक उदाहरणें त्यानें सोडवून दाखविलीं. व बीजगणित शास्त्रांतले जें जें म्हणून ज्ञान त्यावेळीं उपलब्ध होतें तें आपल्या ग्रंथांत देऊन शिवाय चक्रवालाची गुप्त मंजूषा त्यानें आपल्या वाचकांपुढें उघडून ठेवली. तिच्यांतलीं उदाहरणें पाहून युरोपीय गणित्यांनीं तोंडांत बोटें घातली. वारे भास्कराचार्य ! असे उद्‌गार त्यांच्या तोंडून निघाले. कॅजोरी साहेब आपल्या गणितशास्त्राच्या इतिहासांत म्हणतात. ' वर्गप्रकृति व संश्लिष्ट कुट्टकांच्या रीती शोधून काढण्यांत हिंदू गणितज्ञांनीं जितकें प्रावीण्य दाखविलें तितकें कोणींच दाखविलें नाहीं. ' ड-मार्गन साहेब तर चक्रवाल पद्धतीवर भाळलेच होतें असें दिसतें. लाग्रांजचे अगोदर संख्याशास्त्रांत भास्कराचार्यांच्या योग्यतेचा दुसरा गणिती नव्हता असें त्यांचें स्पष्ट मत आहे.

भास्कराचार्यांचे इतर ग्रंथ :

आतांपर्यंत लीलावती व बीजगणियांत भास्कराचार्यानें ज्या विषयांचा परामर्श घेतला त्यांची थोडी कल्पना वाचकांस आली असेल. गणिताध्याय व गोलाध्याय हे ज्योतिःशास्त्राचे म्हणजे ग्रहगणिताचे ग्रंथ आहेत. त्यांत पृथ्वी, चंद्र, सूर्य, ग्रह, त्यांचीं भ्रमणें, ग्रहणें वगैरे गहन विषय आहेत. सिद्धांतशिरोमणी खेरीज करणकुतूहल नांवाचें ज्योतिगणिताचें एक पुस्तक भास्कराचार्यानें शके ११०५ (इ. सन ११८३) मध्यें लिहिलें. यां खेरीज आणखी दोन पुस्तकें त्यानें लिहिलीं असावींत असें त्याच्या टीकाकारांनीं केलेल्या उल्लेखांवरून वाटतें. एक पुस्तक ' सर्वतोभद्रयंत्र ' या नांवाचें असावें व दुसरें ' विवाहपटल ' नांवाचें असावें. ह्या पुस्तकांच्या मूळ प्रती किंवा नकला अद्याप कुठेंच सांपडलेल्या नाहींत.

भास्कराचार्यांची काव्यशक्ति :

या प्रकरणाच्या आरंभीं आम्हीं जें एका पाश्चात्य गणित्याचें वचन दिलें आहे त्याप्रमाणें चांगल्या गणितज्ञास थोडी तरी कवित्वशक्ति असावी

हें इष्ट आहे. ललित साहित्याचे लेखक म्हणतील कीं गणित विषय कविता रूपानें लिहिणारा लेखक हा कवि या पदवीला अयोग्य आहे. कारण काव्य हें टलाट, पलाप अशा शब्दरचनेंत नसून तें काव्यांत वर्णिलेल्या भावना, विचार व त्यांचें आविष्करण यांत आहे. पण ही गोष्ट देखील खरी कीं, वर्ण्यविषय छंदोबद्ध पद्धतीनें मांडण्यास गद्य लेखकांपेक्षां कांहीं तरी जास्त कौशल्य कवीला लागत असतें. फार झालें तर कवींचे दोन प्रकार कल्पावे. त्यांपैकीं एकाला कवि म्हणावें व पद्यांत लिहिणाऱ्यास पद्यलेखक म्हणावें. म्हणजे भास्कराचार्य निदान पद्यलेखक होता इतकें तरी वाचक कबूल करतीलच, तथापि भास्कराचार्य हा नुसता पद्यलेखक नसून सुकवि होता असें आम्हांस म्हणावयाचें आहे. त्यानें गोलाध्यायाच्या ऋतुवर्णन अध्यायांत १४ श्लोक हे आपली काव्यप्रतिभा लोकांच्या नजरेस यावी म्हणून मुद्दाम लिहिले आहेत. त्यांतले कांहीं श्लोक आम्ही पुढें देतों. हेमंत ऋतूचें वर्णन करतांना तो म्हणतो—

" सहस्यकाले बहुशस्य शालिनीम् ।
चितामवश्यायकमौक्तिकोत्करैः ।
प्रहृष्टपुष्टाखिलगोकुलाभिलां ।
विलोक्य हृष्यत्यधिकं कृषीवलाः ॥ "

अर्थ : " हेमंत ऋतूंत पृथ्वी भरल्या धान्याच्या शेतांनीं अतिशय शोभते. व या काळांत सकाळीं अवश्य येणारे जे दंवबिंदू (तेच जणूं मोतीं) त्यांच्या समूहानें ती सुंदर दिसते. आनंदी व धष्टपुष्ट अशा गोकुलानें ती शोभते. व अशा सुंदर पृथ्वीस पाहून शेतकरी अधिकच आनंदी होतात."

विप्रलंभ शृंगाराचें वर्णन म्हणून खालचा श्लोक वाचनीय आहे. त्यांतील दुसरी व चौथी या ओळी एकच असून निराळ्या पदच्छेदामुळें त्यांचे अर्थ निराळे होतात.

" मदनदहनखिन्नामागतेऽप्येत्य काले ।
परिमलबहलानां मालतीनां नदीनां ।

अद्य दयित सिंचस्यात्मदृग्वारिणा किं ।
परिमलबहलानां मा लतीनां न दीनाम् ॥ ”

या श्लोकाचें श्लोकबद्ध भाषांतर कै. जनार्दन बाळाजी मोडक यांच्या ग्रंथांत आढळलें. तेंच पुढें दिलें आहे.

“ झाली ही प्राप्तवर्षा परिमलबहला मालती आपगाही ।
होती, रत्यर्थ सारा युवजनलघुता-मान सोडोनि वाही ।
झालें मी दीन हा हा मदनदहन हा जाळितो मानसातें ।
प्राणेशा निर्दया रे स्वनयनसलिलें सिंचिशी कां न मातें ? ॥ ”

नमुन्यादाखल हे दोन श्लोक पुरे आहेत. ते वाचतांना आपण ऋतुसंहार किंवा मेघदूत हीं कालिदासाचीं काव्यें वाचीत आहोंत असा क्षणभर भास झाल्याशिवाय राहात नाहीं.

पृथ्वी वाटोळी आहे याविषयीं सांगतांना भास्कराचार्य म्हणतात—जर पृथ्वी आरशाच्या काचेसारखी सपाट असती तर सूर्य आकाशांत वर किंवा दूर कुठेंही गेला तरी मनुष्यांना (देवांप्रमाणें) केव्हांही दिसला असता. मग तो त्याप्रमाणें कां दिसत नाहीं ? अर्थात् पृथ्वी सपाट नाहीं.

भास्कराचार्यांचें कोडें—पुढें दिलेलें कोडें हें भास्कराचार्यानें तयार केलें आहे असें म्हणतात. अर्थात् त्याचा कर्ता भास्कराचार्यच आहे याबद्दल नक्की पुरावा उपलब्ध नाहीं. पण आख्यायिकेप्रमाणें तें त्यानेंच केलें असावें असें वाटतें. कोडें असें आहे—

एक नदी आहे. तिच्या एका काठांवर तीन जोडपीं आहेत. त्यांतील दोन ब्राह्मणाचीं असून एक अस्पृश्याचें आहे. या सर्वांना एका होडींतून नदीपार जावयाचें आहे. होडीला नावाडी नाहीं. पण या मंडळींतल्या प्रत्येकास वल्हवतां येतें. होडींत एका वेळेस दोन माणसें बसतात. आतां प्रत्येक खेपेस दोघांनीं जायचें व एकानें होडी परत आणायची असें करून ही मंडळी परतीरास सहज जाऊं शकली असती. पण दोन कठीण अडचणी आल्या. एक अस्पृश्यता. कारण आमची ही ब्रह्मवृंद मंडळी त्या महाराबरोबर एकत्र

होडींत बसण्यास कबूल नव्हती. तसेंच दुसरी अडचण बायकांनीं उभी केली त्या म्हणाल्या कीं, " होडींत काय अगर कांठांवर काय, नवरा जवळ असल्याशिवाय आम्ही परपुरुषाजवळ थोडा वेळ देखील राहणार नाहीं. " तर या दोन्ही अटी सांभाळून त्या मंडळींनीं पैलतीर कसा गांठला ?

या कोड्याचें उत्तर आम्ही देत नाहीं, तें वाचकांनीं सोडवावें. फक्त पहिली खेप महार व त्याची स्त्री यांनीं केली एवढें सांगतों. भास्कराचार्यांची अचाट बुद्धि दाखविणारे हें कोडें सुप्रसिद्ध आहे. भास्कराचार्यांस जादूचे चौरस माहीत होते असें खालील श्लोकावरून दिसून येईल.

" वांछा कृतार्धो कृतमेकहीनं ।
द्वीये ग्रहे षोडश सप्तमेऽष्टमे ।
तिथ्यावतारे प्रथमे च शिष्टे ।
द्विसप्तषट्त्र्यष्टकुवेदबाणैः ॥ "

हा श्लोक लीलावतींत आहे असें पुष्कळजणांचें म्हणणें आहे. मला तो लीलावतींत आढळला नाहीं. असलाच तर तो प्रक्षिप्त असावा. तथापि या श्लोकाप्रमाणें सोबतचा चौरस तयार होतो. वरील श्लोकाचा अर्थ : जी बेरीज हवी आहे तिच्या निम्यातून १ वजा करून (येथें $\frac{३४}{२} - १ = १६$) येणारा आंकडा दुसऱ्या घरांत मांडा. पुढें एक एक कमी करून नववें, सोळावें, सातवें, आठवें, पंधरावें, दहावें व पहिलें घर यांत आंकडे मांडा. उरलेल्या घरांत अनुक्रमें २, ७, ६, ३, ८, १, ४, व ५ असें अंक भरा म्हणजे हा भद्रचौरस ¶ होईल व बेरीज उभी आडवी, तिरपी ३४ इतकी होईल.

९	१६	२	७
६	३	१३	१२
१५	१०	८	१
४	५	११	१४

भास्कराचार्यांची योग्यता :

इतका वेळ आम्ही भास्कराचार्यांच्या गणितांतील ज्ञानाबद्दल थोडक्यांत

¶ हें नाव नारायणानें आपल्या गणितकौमुदींत दिलें आहे. भद्र = शुभ.

परामर्श घेतला. वाचकांना त्यावरून व इतर माहितीवरून तो अतिशय विद्वान् पंडित असला पाहिजे हें दिसून आलेंच असेल. त्याची खगोल ज्योतिषांत किती प्रगति झालेली होती हें सांगण्याचें आम्ही टाळतों. एकतर तो विषय सामान्य वाचकांच्या तसेंच लेखकाच्या आंवाक्याबाहेरचा आहे. व पुस्तकाच्या वर्ण्य विषयांत तो नीट बसत नाहीं. भास्कराचार्यानें पृथ्वी स्थिर मानून ग्रहगणित केलेलें आहे. तथापि पृथ्वीच्या अक्षभ्रमणाची व कक्षा-भ्रमणाची कल्पना त्यास होती. न्यूटनच्याप्रमाणेंच पदार्थमात्र एकमेकांस आकर्षण करतात हेंही त्यास ठाऊक होतें. आकाशांतून जमिनीवर तिर्यक् दिशेनें पडणारा पदार्थ सरळ रेषेनें भ्रमण न करतां वक्र रेषेनें पडतो याची त्याला कल्पना होती. म्हणजे आधुनिक शास्त्रांचे जे मूलभूत सिद्धांत आहेत व ज्यांचा शोध कोपर्निकस व टायकोब्राही यांच्या कालानंतर पाश्चात्यांना लागला त्यांतले बरेच शोध भास्कराचार्यास ठाऊक होते. न्यूटनच्या Calculus म्हणजे शून्यलब्धि शास्त्राची मूळ सीमांकांची कल्पना भास्करा-चार्यास होती. हें सर्व असून शिवाय आमच्या प्राचीन पद्धतीप्रमाणें तो सर्वशास्त्र पारंगत होता. संस्कृतसारख्या क्लिष्ट भाषेस वाकवून त्यानें तिला गणितशास्त्राची संपूर्णपणें बटीक बनविली आहे. ललित साहित्यांतले संकेत उपयोजून त्यानें संख्या दाखविल्या आहेत. पारिभाषिक शब्दांचे भांडार त्यानें आमच्या पुढें खोललें आहे. या भांडारांत आजच्या आमच्या गणितविषयाच्या उपयोगी पडतील असे शेंकडों पारिभाषिक शब्द आले आहेत. त्यांचा उपयोग आम्हांस मराठींतून कॉलेजचें गणित शिकवण्यासही होणार आहे. इच्छा मात्र पाहिजे. **लीलावती** हें पुस्तक तर अखिल भारतांत त्याकाळीं इतकें लोकप्रिय झालें कीं त्यावेळेपासून पुढें ७०० वर्षे अंकगणित **लीलावतींतूनच** शिकविलें जाई. छापण्याची कला जर भास्करा-चार्यांच्या काळांत लोकांस ठाऊक असती तर आज **लीलावतीची** हजारावी आवृत्ति काढण्याचा सुयोग व सद्भाग्य आम्हांस लाभलें असतें; तसेंच

आम्ही ग्रीक लोकांपासून बरेंचसे ज्ञान उसनें घेतलें असें जे पाश्चात्य लोक म्हणतात त्या आरोपांतून आम्ही बचावलों असतों. भास्कराचार्य हा दृक्प्रत्ययवादी ज्योतिषी होता. ग्रहणें व युत्या पंचांगाप्रमाणें होत नसतील तर पंचांगें चूक आहेत; आमचें गणित सुधारलें पाहिजे असें त्याचें मत होतें. सनातन लोकांच्या कल्पना चुकीच्या असल्या तर त्या बदलणें फार कठीण असतें; आपली अजूनही अशी कल्पना आहे कीं, चंद्रग्रहणाचे वेळीं राहु चंद्राचा ग्रास करतो. अर्थात् खरी गोष्ट ही कीं, ग्रहणाच्या वेळीं चंद्रबिंब पृथ्वीच्या छायेंत गेल्यामुळें अदृष्ट होतें. भास्कराचार्यास ही गोष्ट ठाऊक होती. पण ती लोकांस पटविणें कठीण. मधला मार्ग काढून तो म्हणतो— "लोकहो, राहु नांवाचा राक्षस नाहीं. चंद्रबिंब ग्रहणांत पृथ्वीच्या छायेंत जातें. पण तुम्हांस राहु हवाच असेल तर असें म्हणा कीं, राहूनें पृथ्वीच्या छायेंत शिरून चंद्राचा ग्रास केला." म्हणजे जुनें व नवें यांचा समन्वय करण्यास तो तयार असे.

भास्कराचार्य बगदाद शहरीं गेला असावा असें कै. दीक्षित म्हणतात. हिंदी गणिताचा अभ्यास करण्यासाठीं कांहीं शास्त्री व ज्योतिषी यांना तुर्कस्तान व अरबस्तान या देशांत नेण्यांत आल्याचा उल्लेख अरबी ग्रंथांतून आढळतो. पण त्यांचीं नांवें निश्चितपणें समजत नाहींत. शिवाय भास्कराचार्य तिकडे गेलाच असता तर त्याच्या ग्रंथांत अल्-ख्वारिस्मी या सुप्रसिद्ध अरबी गणितज्ञासंबंधीं किंवा त्याच्या अल्-जब्र-वअुल मुकाबला या सुप्रसिद्ध ग्रंथाविषयीं कांहीं तरी उल्लेख येणें अपरिहार्य होतें. तसें ज्या अर्थी झालें नाहीं त्या अर्थी भास्कराचार्यांच्या परदेशगमनाला भरपूर पुरावा दिसत नाहीं.

भास्कराचार्य वयाच्या ७९ व्या वर्षी वारला. त्याची शारीरिक व मानसिक शक्ति शेवटपर्यंत उत्तम काम देत होती असें कै. दीक्षित यांच्या ग्रंथावरून दिसतें. भास्कराचार्यानंतर हिंदुस्थानांत नामांकित गणिती फारसे झालेच नाहींत. जे थोडे बहुत झाले त्यांनीं भास्करीय ग्रंथांची टीका

लिहिण्यांतच आपली लेखणी झिजविली. स्वतंत्र नवीन संशोधन त्यांना करतां आलें नाहीं. मुसलमानांच्या स्वाऱ्यांनीं उत्तर भारताचा जो विध्वंस झाला त्यांत शास्त्रीय ज्ञानाचा लोप उत्तरेंत झालाच होता. भास्कराचार्यांच्या मृत्यूनंतर त्यांची नजर दक्षिणेकडे वळली. त्याचा परिणाम व आमचा आळस यांनीं संशोधनाची धारा तोडली. आम्ही अरबी व फारसी ग्रंथांचीं भाषांतरें करण्यावरच समाधान मानूं लागलों व परिणामतः भास्कराचार्यां-नंतर त्याच्याच ग्रंथांची घोकंपट्टी करण्याशिवाय फार कार्य पुढच्या ६०० वर्षांत झालें नाहीं. असा हा अष्टपैलू ज्योतिषी शके १११५ मध्यें दिवंगत झाला.

प्रश्न

१. भास्कराचार्यांचें मूळ गांव कोणतें ? त्याचें नक्की स्थान कोणतें या विषयीं तुम्हांस काय माहिती आहे ?

२. लीलावतीविषयीं तीन दंतकथा सांगा. यांतली खरी असलीच तर ती कोणती व कां ?

३. कपाटसंधि रीत म्हणजे काय ? ४५२ × २६ हा गुणाकार कपाटसंधीनें करा.

४. यथाकोष्ठ रीतीचें वर्णन थोडक्यांत करा. ९९९ × ९९ हा गुणाकार कोष्ठपद्धतीनें करा.

५. गोलाचें घनफळ पंचपात्रीच्या घनफळावरून कसें काढाल ?

६. दोन ऋण संख्यांचा गुणाकार धन होतो. या संबंधीं भास्करा-चार्यांचें सूत्र कोणतें ?

७. खालील उदाहरण वर्गप्रकृतीनें सोडवा. $१२ क्ष^{२} + १ = य^{२}$

८. खालील इंग्रजी शब्दांस मराठी वा संस्कृत प्रतिशब्द सांगा.
Calculus, Magic square, Diameter, Radius, Cyclic Method, Ruby, Product. Difference.

९. भास्कराचार्यांविषयीं ५० ओळींत एक निबंध लिहा.

४. श्रीनिवास रामानुजन्

इंग्रजी भाषेंत एक सुप्रसिद्ध म्हण आहे. तिचा आशय असा आहे कीं जगांत जे श्रेष्ठ पुरुष म्हणून गणले जातात त्यांचे तीन वर्ग पाडतां येतात. कांहीं लोक जन्मतःच मोठे असतात. कांहीं प्रयत्नांती मोठे होतात तर कांहींच्यावर मोठेपण लादलें जातें. श्रीनिवास रामानुजन् हा एक अत्यंत कुशाग्र बुद्धीचा मोठा माणूस होऊन गेला. केवळ भारतांतील गणितज्ञांतच नव्हे तर युरोप, अमेरिका वगैरे पुढारलेल्या खंडांतले जुने व नवे सर्व गणिती हिशेबांत घेतले तर त्यांच्यांत देखील त्याचा क्रमांक पहिल्या पांच-सहा लोकांत लागेल इतक्या योग्यतेचा तो मोठा माणूस होता. तो जन्मतः मोठा होता कीं आपल्या परिश्रमानें मोठा झाला याचा निर्णय वाचकांवर सोंपवून त्याचें त्रोटक चरित्र आम्ही पुढें दिलें आहे.

जन्म व बालपण :

श्रीनिवास रामानुजन् यांचें संपूर्ण नांव श्रीनिवास आयंगार रामानुज आयंगार (मद्रासी पद्धतीप्रमाणें) असून त्यांचा जन्म ता. २२ डिसेंबर १८८८ या दिवशीं झाला. मद्रास प्रांतांत कुंभकोणम् शहराच्या जवळच एरोड या गांवीं आपल्या आजोबांच्या घरीं रामानुजन् जन्मला. हें गांव कावेरी व भवानी या नद्यांच्या पवित्र संगमावर वसलेलें आहे. तेथें रामानुजन्चे आजोबा कोर्टांत अमीन (कोर्टांतील एक प्रकारचा नोकर) म्हणून काम करीत. रामानुजन्चें वडिल व आजोबा कुंभकोणम् येथें एका कापडाच्या व्यापाऱ्याकडे मुनीम म्हणून काम करीत. त्यांच्या घरची स्थिति अतिशय गरिबीची होती. शिवाय त्या काळास अनुसरून त्यांच्या घरांत कर्मठपणा व धर्मभोळेपणाही भरपूर प्रमाणांत होता. यांचा अतिरेकच पुढें रामानुजन्ची प्रकृति बिघडण्यास कारण झाला.

रामानुजन् दिसण्यांत काळासांवळा, मध्यम बांध्याचा होता. लहानपणीं तो अशक्त असे. असें म्हणतात कीं जीं माणसें अतिशय कुशाग्रबुद्धीचीं

असतात तीं थेट आपल्या आईसारखीं दिसतात. रामानुजन् अगदीं आपल्या आईच्या वळणावर गेला होता. त्याचा चेहरा श्यामवर्ण असला तरी त्याच्या डोळ्यांत लहानपणापासूनच एक विलक्षण तेज असे. त्यामुळें शाळेंत असतांना तो इतर मुलांतून चटकन निवडून दिसत असे. एरोड गांवीं त्याचें प्राथमिक शिक्षण झालें व दुय्यम शिक्षणासाठीं त्यानें कुंभकोणम् येथील टाऊन हायस्कूल या संस्थेंत नांव दाखल केलें. आपल्या तैलबुद्धीची चमक त्यानें शाळेंत आल्यापासूनच दाखविण्यास सुरवात केली. त्याला गणित शिकविणारे जे शिक्षक असत त्यांना तो अंकगणितांतले व बीजगणितांतले अनेक कूट प्रश्न विचारून इतका भंडावून सोडी कीं अखेर ते त्याच्यापुढें निरुत्तर होत. तो शाळेंतल्या सवंगड्यांत फारसा मिसळत नसे. एकलकोंडेपणानें राहाणें व गणिताच्या अवघड प्रश्नांत गुंग होणें हा त्याचा जणूं काय स्वभावधर्मच झाला होता. त्याच्या या संवयीची शिक्षकांना जाणीव असल्यामुळें ते देखील त्याच्या वाटेस फारसे जात नसत. क्रीडांगणावर जाऊन दररोज कांहींतरी खेळ खेळण्याची सक्ति त्याच्यावर होत नसे. शिक्षकांना त्याच्या कुशाग्रबुद्धीचें मोठें कौतुक वाटत असे. शालेय गणितावरचें त्याचें प्रभुत्व इतकें दांडगें होतें कीं बीजगणित व भूमिति यांचे पेपर तो केवळ दिलेल्या वेळेच्या अर्ध्या वेळांत सोडवीत असे. बीजगणिताचीं सूत्रें (Formula) पडताळून पाहाणें हा त्याचा एक छंदच होता. उदाहरण द्यावयाचें झाल्यास पुढें दिलेलें एक सूत्र पाहा. लागोपाठच्या चार अंकांच्या गुणाकारांत एक मिळविल्यास होणारी बेरीज संपूर्ण वर्ग असते. बीजगणिताच्या भाषेंत हें लिहावयाचें झाल्यास य (य+१)(य+२) (य+३)+१ हा संपूर्ण वर्ग असतो. आतां वरील पदावलीचे वर्गमूळ $य^{२}$ + ३ य + १ येतें. तेव्हां सूत्र सिद्ध झालें. पण रामानुजन् यला किंमती देऊन सूत्र बरोबर आहे कीं नाहीं याची दहा वेळां खात्री करून घेतल्याशिवाय स्वस्थ राहात नसे. उदाहरणार्थ

जर य = १ तर १ × २ × ३ × ४ + १ = $५^{२}$.

जर य = १५ तर १५ × १६ × १७ × १८ + १ = $२७१^{२}$

अशा रीतीनें बीजगणितांतली सूत्रें पडताळून पाहाण्यांत त्याला अतिशय गंमत वाटत असे. इतर विद्यार्थ्यांना व शिक्षकांना अवघड वाटणारे प्रश्न रामानुजन् चुटकीसरसे सोडवायचा.

इन्स्पेक्टरांचें आश्चर्य :

एकदा रामानुजन्च्या शाळेची चांचणी घेण्यासाठीं एक इन्स्पेक्टर आले होते. गृहस्थ गणितविषयांत मुरब्बी होता. रामानुजन्च्या वर्गांत आल्यावर त्यांनीं वर्गांतल्या सर्व मुलांना सोडविण्यासाठीं एक उदाहरण घातलें. तें असें : एका वर्गांत शंभर मुलें आहेत. जर पहिल्या मुलांस १०० रुपये, दुसऱ्यास ९९, तिसऱ्यास, ९८ याप्रमाणें शेवटच्यास १ अशीं बक्षिसें एखाद्या श्रीमंत गृहस्थानें द्यावयाचीं ठरविलीं तर त्याला एकूण किती रुपये लागतील ? हा प्रश्न विचारून इन्स्पेक्टर वर्गांतल्या मुलांच्या पाट्या पाहूं लागले, उद्देश हा कीं मुलें पाट्यावर आंकडेमोड काय करीत आहेत तें कळावें. पाहातात तों त्यास असें आढळून आलें कीं प्रत्येक मुलगा उत्तर काढण्यासाठीं मारे १ + २ = ३, ३ + ३ = ६, ६ + ४ = १० या क्रमानें बेरीज करीत बसला आहे. पण कोंपऱ्यांतल्या बाकावरचा एक मुलगा मात्र आपली पाटी डेस्कवर पालथी टाकून खुशाल गंमत पाहातो आहे इतरांची ! त्यांनाही जरा आश्चर्य वाटलें. रामानुजन्च होता तो.

त्याला उभें करून साहेबांनीं विचारलें, ‘ कायरे, केलंस कां तूं तें गणित ? ’

‘ होय, सर ’ रामानुजन् म्हणाला, ‘ मी तर केव्हांच उत्तर काढलं आहे त्याचं ! ’

‘ काय आलं रे उत्तर तुझं ? ’

‘ ५०५० रुपये सर. ’

साहेबमजकुरांस आणखीनच आश्चर्य वाटलें. ‘ कसं केलंस तें सांगशील का ? ’

‘ सांगतों सर. मी मुलांच्या जोड्या बनविल्या. १०० रुपये बक्षिसवाला

व १ रुपयावाला. मिळून जोडीला १०१ रुपये. ९९ रुपयेवाला व २ रुपयेवाला. मिळून जोडीला १०१ रुपये. अशा १०० मुलांच्या ५० जोड्या झाल्या. म्हणून १०१ × ५० = ५०५० रुपये झाले.'

'शाबास, अगदीं बरोबर !' असें म्हणून इन्स्पेक्टरांनीं त्याची पाठ थोपटली व शिक्षकास उद्देशून ते म्हणाले, 'या सर्व मुलांत हाच एक मुलगा खरा हुशार दिसतो आहे.' आपल्या गणिताच्या प्रभुत्वाविषयीं त्याला एक प्रकारचा अभिमान असे. आपले म्हणून तो कांहीं सिद्धांत आपल्या वर्गांतल्या दोस्तांना सांगत असे. त्यांना रामानुजन्चे सिद्धांत अतिशय गूढ व कोड्यांप्रमाणें वाटत असत.

शालेय जीवन :

शाळेंत असतांना रामानुजन् त्याच्या दांडग्या स्मरणशक्तीबद्दल फार प्रसिद्ध होता. परस्मैपदीं व आत्मनेपदीं धातूंच्या कारिका पाठ म्हणणें हा त्याच्या हातचा मळ होता. या बालवयांत देखील Carr's Synopsis of Pure Mathematics या सारखीं अवघड पुस्तकें तो कॉलेजच्या वाचनालयांतून घरीं आणून वाचीत असे. दोहोंचें वर्गमूळ, $=\sqrt{२}$ वर्तुळाचें व्यासपरिधि गुणोत्तर π, लाग्रतमांचा 'मूलांक e इत्यादि संख्यांच्या किंमती तो अनेक दशांशस्थळांपर्यंत सहज सांगत असे. कित्येक वर्षांपूर्वीं घडलेल्या गोष्टी त्याच्या स्मरणांत अगदीं ताज्याप्रमाणें राहात. सहाव्या इयत्तेंत असतांना तो गोलीय त्रिकोणमिति व साधी त्रिकोणमिति यांतले प्रश्न सहज सोडवायचा.

मनानें एकाद्या तत्त्ववेत्त्यासारखा तो असे. कोणत्याही घटनेचें मूळ शोधून काढण्याचा ध्यास त्याला असे. शाळेंत असतांना त्याचें एकदां ऑपरेशन झालें. (बहुतकरून टॉन्सिलचें) त्यावेळीं डॉक्टरांनीं त्याला भूल दिली. तशा स्थितींतही हा पठ्ठ्या कुठल्या गोष्टीचा विचार करीत असावा ? तर भूल दिल्यावर माणसाच्या पंच ज्ञानेंद्रियांपैकीं कोणतें इन्द्रिय प्रथम बधिर होतें याचा तो छडा लावीत होता ! शाळेंत असतांना त्याला एक

शिष्यवृत्ति पण होती. तथापि घरच्या गरिबीमुळें त्याला एका गृहस्थांकडे रीडर म्हणून काम करावें लागत असे. अशा रीतीनें आपला शालेय अभ्यासक्रम पुरा करून **रामानुजन्** मद्रास युनिव्हर्सिटीची मॅट्रिक परीक्षा इ. स. १९०३ सालीं उत्तीर्ण झाला. परीक्षेंत चांगल्यापैकीं गुण मिळाल्यामुळें त्याला मद्रास युनिव्हर्सिटीची ज्यूनिअर सुब्रह्मण्य शिष्यवृत्ति मिळाली.

विश्वविद्यालयीन शिक्षण :

रामानुजन्चें शालेय शिक्षण ज्याप्रमाणें सुरळीतपणें झालें तसें महाविद्यालयीन शिक्षण झालें नाहीं. मॅट्रिकची परीक्षा उत्तीर्ण झाल्यावर त्यानें मद्रास येथें युनिव्हर्सिटी कॉलेजांत नांव दाखल केलें. तेथें श्री. पी. व्ही. शेषु अय्यर हे त्याचे गणितविषयाचे पहिले प्राध्यापक होते. **रामानुजन्**चें गणितशास्त्रांतलें असामान्य प्रभुत्व लक्षांत येण्यास त्यांना उशीर लागला नाहीं. त्यांच्या देखरेखीखालीं त्याचें वाचन व संशोधन चालू होतेंच. तथापि पहिल्या वर्षाच्या परीक्षेंत **रामानुजन्** नापास झाला. त्याचें इंग्रजी मुळांत कच्चेंच होतें व कॉलेजांत गेल्यावरसुद्धां आपलें इंग्रजीवरील प्रभुत्व वाढावें म्हणून त्यानें फारसा प्रयत्न केला नाहीं. त्याचें सर्व लक्ष गणितशास्त्रांतील व विशेषतः संख्याशास्त्रांतील उच्च संशोधनात्मक ग्रंथ वाचण्याकडे केंद्रीभूत झालें होतें. याचा साहजिक विपरीत परिणाम होऊन तो पहिल्या परीक्षेंत अनुत्तीर्ण झाला. युनिव्हर्सिटीच्या काटेकोर नियमांच्या जाळ्यांतून सुटून तो वरच्या वर्गांत गेला नाहीं. **रामानुजन्** हा कॉलेजच्या नियमांच्या चाकोरींत बसणारा विद्यार्थी नव्हे ही गोष्ट श्री. शेषु अय्यर यांना अवगत होती. पण त्यांच्या इतर सहकाऱ्यांना ती ठाऊक होती असें दिसत नाहीं. त्यामुळें नापासाचा शिक्का **रामानुजन्**च्या कपाळीं तर लागलाच पण त्याची त्याबरोबर शिष्यवृत्ति बंद झाली. ही गोष्ट इ. स. १९०५ मध्यें घडली. त्याचा परिणाम असा झाला कीं, मद्रास येथें शिकणें त्यास अशक्य झालें. विजगापट्टण येथें त्याचे कोणी नातेवाईक होते. त्यांच्याकडे राहून कॉलेजच्या

परीक्षा द्याव्या असा त्यानें बेत केला. परंतु घरच्या गरिबीमुळें तेंही शक्य नव्हतें. म्हणून इ. स. १९०६त पुन्हां त्यानें मद्रास येथील पंचप्पा कॉलेजांत नांव दाखल केलें. या वर्षी तरी आपण उत्तीर्ण होऊन बी. ए.च्या वर्गात जाऊं अशी दुर्दम्य आशा त्यानें बाळगली होती. पण मनुष्य ठरवतो एक आणि ईश्वरलिखित असतें निराळेंच ! या नियमाला रामानुजन् तरी कसा अपवाद होणार ? या वर्षी तो इंग्रजींत दुसऱ्यांदा नापास झाला. युनिव्हर्सिटीच्या कांटेकोर नियमांच्या चौकटींतून तो सुटूं शकला नाहीं. केवळ परभाषेच्या अज्ञानाचा हा केवढा भुर्दंड ! सर्व शिक्षण मातृभाषेंतून कां दिलें गेलें पाहिजे याविषयीं आणखी संयुक्तिक प्रमाण कोणतें हवें ? कॅंब्रिज युनिव्हर्सिटीचे प्रो. हार्डी (ज्यांच्यासंबंधीं पुढें पुष्कळ माहिती येणार आहे) इ. स. १९२० च्या रामानुजन्च्या मृत्युलेखांत म्हणतात, " आमच्या विश्वविद्यालयीन शिक्षणपद्धतीचा ठोकळेबाजपणा, फोलपणा व अयशस्विता सिद्ध करण्यास याहून समर्थ असें दुसरें उदाहरण सांपडणार नाहीं. कारण या पद्धतीमुळें जे सामान्य बुद्धीचे राजमार्गी विद्यार्थी असतात त्यांची सोय होते पण रामानुजन्सारखे जे कुशाग्रबुद्धीचे व मूलग्राही संशोधन करूं शकणारे विद्यार्थी असतात त्यांची भयंकर कुचंबणा होते."

नोकरीच्या शोधार्थ :

कॉलेजच्या पहिल्याच परीक्षेंत दोनदां अपयश आल्यामुळें रामानुजन्ला अर्थातच विश्वविद्यालयाला रामराम ठोकावा लागला. तीन वर्षेंपर्यंत नाहीं शिक्षण, नाहीं नोकरी अशा अनिश्चित स्थितींत त्यास काढावी लागली. अशा कठीण परिस्थितींतही त्याचा गणिताचा व्यासंग चालूच होता. " विघ्नैः पुनः पुनरपि प्रतिहन्यमानाः । प्रारब्धमुत्तमजना न परित्यजन्ति । " या कोटींतला रामानुजन् होता. त्यानें सांत व अनंत श्रेढींचा आपला अभ्यास चालूच ठेवला होता. पण केवळ घरीं बसून आयतोबासारखें खाणें त्याला पसंत नव्हतें. तशांत इ.स.१९०९ सालीं त्याच्या वडिलांनीं त्याचें लग्न करून दिलें होतें. त्या काळांत २१ व्या वर्षी लग्न म्हणजे चमत्कारिक

वाटण्यासारखी गोष्ट नव्हती. शिवाय आई-वडिलांची इच्छा मोडण्याचें धैर्य त्यास झालें नाहीं व त्यानें मुकाट्यानें विवाहास संमति दिली. याचा अपरिहार्य परिणाम असा झाला कीं त्याला दोन माणसांच्या पोटापाण्याचा प्रश्न सोडवावा लागला. दक्षिण अर्काट जिल्ह्यांतील तिरुकोईलूर येथें तो प्रथम नोकरीच्या शोधार्थ गेला. त्यावेळीं श्री. व्ही. रामस्वामी अय्यर यांनीं त्याला मद्रासला जाण्याचा सल्ला दिला. त्यावेळीं दिवाणबहादूर आर. रामचंद्र राव हे नेलोर जिल्ह्याचे कलेक्टर होते. त्यांच्या सांगण्यावरून मोठ्या मिनतवारीनें त्याला मद्रास पोर्ट ट्रस्टमध्यें २५ रु. महिना पगारावर कारकुनाचा नोकरी मिळाली (इ. स. १९११).

रामचंद्र राव यांना फार वाईट वाटलें तें अशासाठीं कीं, रामानुजन् सारखा अत्यंत तीव्रबुद्धि विद्यार्थी ह्या नोकरीच्या धकाधकींत फुकट विद्येला पारखा होत होता. रामानुजन्च्या कॉलेजच्या अभ्यासाचा खर्चसुद्धां देण्यास ते तयार होते. पण रामानुजन्चें मन पुन्हां प्रीव्हियस इंटरच्या अभ्यासाकडे लागणें अशक्य होतें. शिवाय कुटुंबिनीची जबाबदारी त्याच्या शिरावर पडली होती. ती टाळून कॉलेजचा अभ्यास करणें त्यास पसंत नव्हतें. तेंव्हां श्री. रामचंद्र राव यांना कृतज्ञतापूर्वक नकार देऊन त्यांच्याच मदतीनें मिळालेली नोकरी त्यानें पतकरली. पण त्यानें आपल्या आवडत्या विषयाचा व्यासंग मात्र दुप्पट जोरानें चालू केला.

मॅथेमॅटिकल सोसायटीच्या त्रैमासिकांत लेख :

याच सुमारास म्हणजे इ. स. १९११च्या ऑगस्टच्या इंडियन मॅथेमॅटिकल सोसायटीच्या त्रैमासिकांत रामानुजन्नें तीन श्रेढि बेरीज करण्यासाठीं गणितज्ञांपुढें ठेवल्या त्या अशा—

$$\text{प्रश्न १ : } १ + \frac{२}{४^३ - ४} + \frac{२}{८^३ - ८} + \frac{२}{१२^३ - १२} + \cdots\cdots$$

या अनंत श्रेढीची बेरीज $\frac{३}{२}$ लाग्रतम $e^२$ इतकी आहे हें कलनशास्त्राच्या मदतीखेरीज सिद्ध करा.

प्रश्न : २ $\left(१+\frac{१}{१^{३}}\right)\left(१+\frac{१}{२^{३}}\right)\left(१+\frac{१}{३^{३}}\right)$

$\left(१+\frac{१}{४^{३}}\right)\cdots$ या अनंतावयवी गुणाकाराची किंमत

$$\frac{१}{२\pi}\left\{e^{\frac{\pi\sqrt{३}}{२}}+e^{-\frac{\pi\sqrt{३}}{२}}\right\}$$

इतकी आहे हें दाखवा.

प्रश्न ३ : $\left(१-\frac{१}{२^{३}}\right)\left(१-\frac{१}{३^{३}}\right)\left(१-\frac{१}{४^{३}}\right)\cdots$

या अनंतावयवी गुणाकाराची किंमत $\frac{१}{३\pi}$ कोज्या $\left(\frac{\pi\sqrt{३}}{२}\right)$ इतकी आहे हें दाखवा. सामान्य वाचकांना यांपैकीं २ व ३ हे प्रश्न समजण्यास कठीणच आहेत. पण पाहिला प्रश्न त्यांच्या पल्ल्यांत येण्यासारखा म्हणून तो थोडक्यांत सोडवून दाखवितों. यांत

$$\text{द्वितीय पद} = \frac{२}{४^{३}-४} = \frac{२}{४(४^{२}-१)} = \frac{२}{४(४+१)(४-१)}$$

$$= \frac{१}{४-१}+\frac{१}{४+१}-\frac{२}{४}$$

$$= \frac{१}{३}+\frac{१}{५}-\frac{१}{२},$$

$$\text{तृतीय पद} = \frac{१}{७}+\frac{१}{९}-\frac{१}{४},$$

चतुर्थ पद $= \frac{१}{११}+\frac{१}{१३}-\frac{१}{६}$, याप्रमाणें सर्व पदांची बेरीज

$$= १ + \frac{१}{३} + \frac{१}{५} + \frac{१}{९} + \cdots$$

$$- \left(\frac{१}{२} + \frac{१}{४} + \frac{१}{६} + \frac{१}{८} + \ldots \right)$$

$$= १ - \frac{१}{२} + \frac{१}{३} - \frac{१}{४} + \frac{१}{५} - \frac{१}{६} + \frac{१}{७} - \cdots$$

$$+ \frac{१}{२} \left(१ - \frac{१}{२} + \frac{१}{३} - \frac{१}{४} + \frac{१}{५} - \ldots \right)$$

$$= \frac{३}{२} \left(१ - \frac{१}{२} + \frac{१}{३} - \frac{१}{४} + \frac{१}{५} - \frac{१}{६} \right.$$

$$\left. + \ldots \right) = \frac{३}{२} \text{ लाग्रतम } e^{२}.$$

त्रैमासिकांत आपल्या पहिल्या लेखास जागा मिळाली असें दिसल्यांनंतर **रामानुजन्** दुप्पट उत्साहानें आपल्या संशोधनकार्याकडे वळला. इ. स. १९१३ च्या आक्टोबरच्या अंकांत त्यानें वर्तुळाचें क्षेत्रमापन (Squaring the circle) या विषयावर एक भौमितिक रचना दिली आहे. शालेय विद्यार्थी व सामान्य भूमिति समजूं शकणारे वाचक यांच्या आकलनांत ती येण्यासारखी असल्यानें ती येथें मुद्दाम उध्दृत केली आहे.

पृष्ठ ९३वरील आकृतींत एक वर्तुळ दिलें आहे. त्याचा व्यास क्ष इंच आहे असें समजा. आतां खालील रचना करा. अब या व्यासाचा म मध्य घ्या. क हा अमचा मध्य काढा. रब = $\frac{१}{३}$ मब घ्या. रल अबला लंब काढा. बख = रल करा. 'अख'वर मन, रप लंब टाका. अट ही अबला लंब काढा व अट = नप करा. अठ = अन करून ठ बिंदु मिळवा. बड = बक करा. ड मधून टठला समांतर डस काढा. म्हणजे बसवरील चौरसाचें क्षेत्रफळ हें वर्तुळाच्या क्षेत्रफळाएवढें होईल.

या प्रश्नाच्या सिद्धतेंतील महत्त्वाच्या पायऱ्या खालील प्रमाणें आहेत.

$रल^2 = अर \cdot रब = \frac{५}{३६} क्ष^2$. ∴ $अख^2 = \frac{३१}{३६} क्ष^2$.

आतां $अट = नप = \frac{२}{३} अन$ ∴ $अट^2 = नप^2 = \frac{४}{९} \times \frac{३१}{१४४} क्ष^2$.

∴ $बट^2 = \frac{३५५}{३२४} क्ष^2$. तसेंच $बठ^2 = अब^2 - अठ^2 = क्ष^2 - \frac{३१}{१४४} क्ष^2$.

∴ $बठ^2 = \frac{११३}{१४४} क्ष^2$. आतां त्रिकोण बटठ, बसड हे समरूप आहेत.

∴ $\frac{बठ}{बट} = \frac{बड}{बस}$ पण $बड = \frac{३}{४} क्ष$. यावरून

$बस = \frac{क्ष}{२}\sqrt{\frac{३५५}{११३}}$ ∴ $बस^2 = \frac{क्ष^2}{४}\left(\frac{३५५}{११३}\right)$. आतां

$\frac{३५५}{११३}$ हे $\frac{\text{परिघ}}{\text{व्यास}}$ या गुणोत्तराचें परिमाण आहे.

अर्थात बस चौरसाचें क्षेत्रफळ = वर्तुळाचें क्षेत्रफळ.

अर्थात बस चौरसाचें क्षेत्रफळ = वर्तुळाचें क्षेत्रफळ.

येथें ही गोष्ट ध्यानांत घेणें जरूर आहे कीं ' पाय् ' या संख्येची किंमत व्यवहारी अपूर्णांक, अथवा सान्त दशांश अपूर्णांक अथवा पूर्ण संख्येचें किंवा अपूर्ण संख्येचें वर्गमूळ, घनमूळ अशा स्वरूपांत व्यक्त करणें सर्वथैव अशक्य आहे. गणितशास्त्रांत तीन सिद्धांत अशक्य मानले जातात. (१) वर्तुळाचें चौरसीकरण, (२) घनाचें दुप्पटीकरण, तसेंच (३) कोनाचें त्रिभाजन. अर्थात् ' पाय् 'ची किंमत $\frac{२२}{७}$, $\frac{३५५}{११३}$, किंवा ३·१४१३ या सर्व किंमती स्थूल आहेत. ' पाय् 'चें पूर्णमूल्य निघूंच शकत नाहीं. म्हणून रामानुजन्‌ची रीत देखील स्थूल स्वरूपांत वर्तुळाचा चौरस करून दाखविते.

रामानुजन्‌चें प्रो. हार्डी यांना पहिलें पत्र :

रामानुजन्‌नें पोर्ट ट्रस्टमध्यें दोन तीन वर्षें खर्डेघाशी करण्यांत घालविलीं. या अवधींत त्याचें गणिती संशोधन चालूच होतें. आपल्या ऑफिसांतला फुरसदीचा वेळ तो या कार्यांत घालवी. त्यानें तयार केलेलीं सूत्रें व श्रेढींच्या बेरजा ह्यांनीं त्याच्या वह्या भरून गेल्या होत्या. आपण लावलेले नवे शोध कोणाला तरी दाखविल्याखेरीज त्याच्या मनाला शांतता लाभणार नव्हती. ज्यांना गणिताचें किंचिन्मात्र ज्ञान आहे. त्यांच्या डोक्यावरून जाण्याइतकें त्याचें संशोधन उच्च होतें. कॉलेजमधील ज्यांना त्याचे सिद्धांत समजण्याइतकी कुवत होती त्यांचें रामानुजन्‌च्या कार्यांकडे बिलकुल लक्ष नव्हतें. नाहीं म्हणावयास प्रो. शेषु अय्यर यांनीं रामानुजन् याची कुशाग्रता पारखली होती. खुद्द प्रो. हार्डी यांच्या अविभाज्य संख्यासंबंधींच्या एका सिद्धांता-वर टीकारूप असें संशोधन रामानुजन्‌नें उच्च गणिताशीं फारसा परिचय

नसतांही केलें होतें. तसेंच अनंत किंमत असणाऱ्या संख्यांचें वर्गीकरण या हार्डी यांच्या सिद्धांतावरही त्यानें भाष्य लिहून ठेवलें होतें..

आपण केलेलें हें सर्व संशोधन वहींतल्या वहींत जिरून जाणार कीं काय अशी साधार भीति रामानुजन्ला वाटूं लागली. अशा स्थितींत एक दिवस रामानुजन् ऑफिसांत नसतांना पोर्ट ट्रस्टचे त्यावेळचे अध्यक्ष सर फ्रॅन्सिस स्प्रिंग हे त्याच्या टेबलाजवळून जात असतां रामानुजन्चें बाड त्यांच्या दृष्टीस पडलें. त्यांत श्रेढींची अनेक उदाहरणें पाहून त्यांना फार अचंबा वाटला. महाविद्यालयाच्या शिक्षणाशीं फारसा संबंध नसलेला हा प्राणी गणितांतल्या अवघड विषयावर इतकें नवीन शोध लावूं शकतो हें पाहून त्यांचें आश्चर्य द्विगुणित झालें. त्यांनीं आपले मित्र व हवामान खात्यांतील एक तज्ञ श्री. आल्फ्रेड वॉकर यांना रामानुजन्चें लिखाण दाखविलें. या जोडीनें रामानुजन् यास असा सल्ला दिला कीं त्यानें आपल्या नवीन अभ्यासाचें एक टांचण करून तें प्रो. हार्डी यांस पाठवावें. या लिखाणावर त्यांच्याकडून जो अभिप्राय येईल त्याला अनुसरून रामानुजन्चें पुढें काय करावयाचें तें ठरवितां येईल असा बेत त्यांनीं आपल्या मनाशीं केला.

रामानुजन्नें मोठ्या उत्साहानें पण धडधडत्या अंतःकरणानें व थरथरत्या लेखणीनें आपलें पहिलें पत्र लिहिलें. तसें पाहिलें तर कुणीकडे हार्डी व कुणीकडे रामानुजन्! हार्डीसाहेब केंब्रिजच्या सुप्रसिद्ध विश्वविद्यालयांतले गणितशास्त्राचे मुख्य प्राध्यापक तर रामानुजन् एक ऑफिसांतला द. महा २५ रुपये कमावणारा, बिनडिग्रीवाला कारकून! त्यानें त्या जाड्या विद्वानास शिकविण्याचें धाष्टर्य करावयाचें! त्यांत रामानुजन्चें इंग्रजी भाषेचें अगदींच कच्चें ज्ञान. पण आपल्या एका मित्राकडून इंग्रजीच्या चुका सुधारून घेऊन त्यानें तें पहिलेंवहिलें पत्र लिहिलें. ज्या पत्रानें रामानुजन् एकदम अंधारांतून प्रसिद्धीच्या उजेडांत आला तें पत्र असें.

मद्रास,
ता. १६ जानेवारी १९१३

प्रिय महाशय,

आपल्या परवानगीनें मी स्वत: माझी ओळख आपणांस करून देउं इच्छितों. मद्रास पोर्ट ट्रस्टच्या ऑफिसांत हिशोब खात्याकडे मी एक कारकून आहे. मला दरसाल २० पौंड (३०० रु.) पगार मिळतो. माझें वय आज २३ वर्षांचें आहे. मला विश्वविद्यालयीन शिक्षणाचा बिलकुल संपर्क झालेला नाहीं. मला फक्त हायस्कूलचेंच शिक्षण मिळालेलें आहे. माझा नोकरींतला फुरसदीचा वेळ मी गणिताच्या अभ्यासांत घालवितों. कॉलेजांत जें पद्धतशीर गणिताचें ज्ञान मिळतें तसें मला मिळालेलें नाहीं. तथापि मला माझ्या पद्धतीनें जसें मिळवितां येईल तसें ज्ञान मिळविण्यासाठीं माझी धडपड चालू आहे.

मी स्वतंत्र रीतीनें अनंतमूल्य श्रेढींचा अभ्यास केला आहे. आणि जे जे निर्णय मला मिळाले आहेत ते अत्यंत आश्चर्यकारक आहेत असें स्थानिक तज्ञ म्हणतात. नुकताच आपण लिहिलेला या विषयावरचा निबंध † माझ्या वाचनांत आला. त्यांत ३६ व्या पानावर आपण असें म्हणतां की अद्याप कोणाही गणितज्ञानें एकाद्या संख्येच्या पूर्वी येणाऱ्या अविभाज्य संख्या किती असतात हा शोध लावलेला नाहीं. मी स्वतः या संबंधीं एक सूत्र तयार केलें असून त्याप्रमाणें अविभाज्यांची संख्या जवळजवळ बरोबर येते. व त्यांत थोडा फरक असला तर तो फारच अल्प असतो. या विषयावरचा माझा निबंध मी आपल्या अवलोकनार्थ पाठवीत आहे. तो कृपा करून वाचावा अशी विनंति आहे. माझी घरची गरिबी असल्यानें (मी स्वतंत्रपणें माझें लिखाण प्रसिद्ध करूं शकत नाहीं) जर त्यांत मोलाचें असें कांहीं आढळलें तर आपण तें प्रसिद्ध करण्याची व्यवस्था करावी. माझ्या निबंधांत मी स्थूलमानानें माझ्या रीति दिल्या आहेत. मी स्वत; अननुभवी असल्यानें आपल्या सल्लयाचा मला फार उपयोग होणार आहे. आपणांस देत असलेल्या त्रासाबद्दल आपली क्षमा मागून

प्रिय महाशय, आपला विश्वासू राहाणारा,
श्रीनिवास रामानुजन

† (Orders of infinity—अनंतमूल्यांचा उच्चनीचक्रम)

विलायतेच्या प्रयाणाची तयारी :

हें पत्र हार्डी यांना मिळालें तेव्हां ते आश्चर्यानें स्तंभितच झाले. त्या पत्रासोबत पाठविलेल्या निबंधांत रामानुजन्नें कमींत कमी १०० सूत्रें लिहून पाठविलीं होतीं व त्यांची सिद्धता दिली होती. अर्थात् रामानुजन्च्या गणिती प्रश्न सोडविण्याच्या रीति परंपरेला अनुसरून असण्याचा संभव कमीच होता. त्यामुळें त्याची त्रोटक रीत ही हार्डी साहेबांना समजण्यास दुर्बोध होत होती. रामानुजन्च्या मनांत दुसरा एक गुप्त संशय असे. आपण हिंदु, आपले शोध जर आपण एखाद्या गोऱ्या माणसास सांगितले व त्यानें ते आपलेच म्हणून प्रसिद्धिले तर त्याचें सर्व श्रेय युरोपियनांना मिळेल नि आपण मात्र अज्ञात राहूं ते राहूंच ! पण हा त्यांचा संशय लवकरच नष्ट झाला. प्रो. हार्डी यांनीं त्याला अतिशय उत्तेजनपर पत्र लिहिलें व इंग्लंडांत येऊन आपलें संशोधन करण्याचा सल्ला दिला.

पण विलायतला जाण्याचा खर्च करण्याची रामानुजन्ची ऐपत नव्हती. त्याच्या पगाराच्या २५ टिकल्यांत त्याचेजवळ १०० रुपये शिल्लक राहाणेंही अशक्य होतें. पण प्रो. हार्डींचे प्रयत्न, प्रो. ई. एच्. नेव्हिल व आर लिटलहेल्स यांचें उत्तेजन, मद्रास युनिव्हर्सिटीनें दिलेली शिष्यवृत्ति, प्रो. शेषु अय्यर व रामचंद्र राव यांनीं अधिक मदतीचीं दिलेलीं आश्वासनें या सर्वांचा परिणाम होऊन रामानुजन् एकदांचा विलायतची वारी करण्यास कबूल झाला.

तसें पाहिलें तर रामानुजन् कर्मठ व सनातनी वृत्तीचा ब्राह्मण होता. परदेशगमन करतांना समुद्र ओलांडल्यामुळें पाप लागतें अशी त्याची समजूत होती. त्याला विलायतेस गेल्यावर तिकडच्या लोकांत सहजगत्या मिसळतां यावें म्हणून श्री. रामचंद्र राव यांनीं आपल्या एका पाश्चात्य मित्राकडे नेऊन मुद्दाम काटा-चमचा वापरण्याची तालीम दिली होती. पण

रामानुजन् हा हिंदु धर्माचा कट्टा अभिमानी होता. त्याची धार्मिकता अतिशय प्रखर होती. इंग्लंडमध्यें असतांनाही त्यानें वार्षिक श्रावणी चुकविली नाहीं. मांसाहार त्यास संपूर्णपणें निषिद्ध होता. म्हणून विलायतेंत देखील तो वाच्यार्थानें स्वयंपाक करीत असे. विटाळ होईल म्हणून परान्न-ग्रहण त्यानें केंब्रिजमध्यें क्वचितच केलें असेल. अशा प्रकारची मानसिक वृत्ति घेऊन रामानुजन् इ. स. १९१४ त केंब्रिज विश्वविद्यालयांत दाखल झाला. तो इंग्लंडमध्यें चार वर्षें राहिला.

केंब्रिज येथील विश्वविद्यालयांत :

केंब्रिज येथें प्रो. हार्डी यांच्या सल्ल्यावरून त्यानें ट्रिनिटी विद्यालयांत नांव दाखल केलें. पण त्याचा गणित विषयांतील निरनिराळ्या शाखांचा परिचय जवळजवळ शून्यच होता. बीजगणित व त्रिकोणमिति यांत तो खूप पुढें होता. पण नवीन शाखांचा परिचय त्यास करून देणें आवश्यक होतें. प्रो. हार्डी हे प्रथम त्या कामास लागले. रामानुजन् आपल्या प्रश्नाचें विवेचन ज्या पद्धतीनें करी तिला सिद्धता म्हणणें हें धाष्टर्याचेंच होतें. रामानुजन् आपलीं सर्व सूत्रें कल्पनाशक्ति, तर्क व पडताळे यांच्यावर आधारून काढीत असे. पण त्याला पृथक्करण व संकरण पद्धति (Analytic and Synthetic methods) मुळींच ठाऊक नव्हत्या. नि त्याशिवाय त्याचें संशोधन शुद्ध स्वरूपांत होणें अशक्य होतें. हार्डीसाहेबांपुढें हा मोठाच पेंच होता. दर वेळेस त्याला नवीन रीत ठाऊक नाहीं म्हणून हिडिसफिडीस करण्याची सोय नव्हती. अशामुळें त्याचा प्रतिभानिर्झर आटण्याचा संभव होता. तेव्हां त्याला शक्य तितकें चुचकारून त्याजकडून काम करून घेणेंच हार्डींनी पसंत केलें.

हार्डींचा विद्यार्थी म्हणून रामानुजन् चार वर्षें इग्लंडांत राहिला. पण शेवटचें वर्ष दीड वर्ष तो आजारीच असे. गणितशास्त्रांतलें अत्यंत महत्त्वाचें असें संशोधन याच काळांत त्यानें केलें. हें सर्व संशोधन आतां 'रामानुजन्चे

लेख ' या नांवानें प्रसिद्ध झालें आहे. प्रो. हार्डी यांच्या परिश्रमानें आतां ते लेख वाचावयास मिळण्याची सोयही झाली आहे. निरनिराळे सुमारें १०० लेख तरी (सर्व संशोधनात्मक) त्यानें लिहिले असावेत. रामानुजन्चें कांहीं सिद्धांत याच काळांत त्याला सांपडले. बहुवयवी विभाज्य संख्या, कोठल्याही मोठ्या संख्येचे अविभाज्य अवयव, p(n) संख्यांचें कांहीं गुणधर्म इत्यादि अनेक विषयांवर त्यानें लिहिलें आहे. पण त्याचें मुख्य संशोधन संख्यांचें दलीकरण (Partition) या विषयावर आहे. ही दलीकरणाची कल्पना भास्कराचार्यांच्या लीलावतींत अंशरूपानें आढळते. वाचकांनाही तिचें मूळ तत्त्व समजण्यास अडचण भासणार नाहीं म्हणून एक उदाहरण देतों.

प्रश्नः– ५ ही संख्या निरनिराळ्या रीतीनें पण पूर्णांकांच्या बेरजेनें किती प्रकारांनीं दाखवितां येईल ? याचें उत्तर असें–

$$५ = १+१+१+१+१ = २+१+१+१ = १+२+१+१$$
$$= १+१+२+१ = १+१+१+२$$
$$= १+२+२ = २+१+२ = २+२+१$$
$$= १+१+३ = १+३+१ = ३+१+१$$
$$= ३ + २ = २ + ३$$
$$= १ + ४ = ४ + १$$

असे एकूण १५ प्रकार झाले. म्हणजे ५ या संख्येचे दलपर्याय १५ झाले. हें अगदींच सोपें उदाहरण आहे पण एकंदर उपपत्ति गहन असून पर्याय-शास्त्र (Permutation & Combinations) व संभवशास्त्र (Probability) यांत असल्यामुळें फारच मोठी भर पडली आहे.

रामानुजन्चें आजारीपण :

पण रामानुजन्चें हें संशोधन फार दिवस चालू नये असा कदाचित्

क्रूर ईश्वरी संकेत असावा असें वाटतें. कारण इ. स. १९१८ च्या शेवटास तो चांगलाच आजारी पडला. खरें म्हटलें तर इ. स. १९१६ पासूनच त्याच्या तब्येतीस उतरती कळा लागलेली होती. दुर्दैवाच्या क्रूर तडाख्यानें त्याची ताकद व आरोग्य दोन्हीही बिघडूं पहात होती. असाध्य अशा क्षयरोगाचा पगडा त्याचेवर बसत होता. परकीय वातावरण, निकस अन्न, अयोग्य धर्म-समजुती, गणित विषयाचाच एकसारखा विचार, संशोधनाचा ध्यास वगैरे अनेक कारणांनीं त्याचें शरीर खंगत होतें. प्रो. हार्डी यांनीं स्वतःच्या मुलाप्रमाणें रामानुजन् यास मानून त्याची प्रकृति ताळ्यावर यावी म्हणून श्रम व पैसा हीं दोन्ही खर्च केलीं. त्याला लंडन, मॅटलॉक, वेल्स वगैरे ठिकाणीं रुग्णालयांत ठेवून पाहिलें. पण हार्डींच्या प्रयत्नांस यश येण्याचें चिन्ह दिसेना. आजारीपणांतही रामानुजन्चें संशोधन चालूच होतें. त्यालाही आजारांतून बरें होऊं अशी खात्री वाटेना. केंब्रिजच्या नर्सिंगहोम-मध्यें असतांना एक गोष्ट अशी घडली कीं जिच्यापुढें रामानुजन्च्या दांडग्या स्मरणशक्तीचा अनुभव हार्डी यांस आला.

मोटारीचा अभद्र नंबर :

केंब्रिजच्या रुग्णगृहांत रामानुजन् असतांना एक दिवस प्रो. हार्डी त्याला भेटावयास गेले होते. ते ज्या टॅक्सींतून गेले तिचा नंबर १७२९ हा होता. हार्डी यांच्या लक्षांत आलें होतें कीं १७२९ ला १३ नें भाग जातो. १३ हा आंकडा इंग्रज फार अशुभ मानतात. तेव्हां हार्डी रामानुजन्ला म्हणाले, " मि. रामानुजन्, मी आज ज्या गाडींतून आलों तिचा नंबर १७२९ आहे. व तो १३ नें विभाज्य आहे म्हणून तो अशुभ आहे असें तुम्हांस वाटत नाहीं काय ? "

यावर रामानुजन्नें चटकन् उत्तर दिलें, " गुरुवर्य, मला तर वाटतें कीं १७२९ इतकी शुभसंख्या दुसरी कुठलीच नाहीं. "

'तें कसें ? ' हार्डी.

'कारण दोन घनांच्या बेरजेनें दोन प्रकारांनीं होणारी सर्वांत लहान संख्या आहे ती '!$ रामानुजन्.

हें स्पष्टीकरण ऐकतांच हार्डीसाहेब अचंबित तर झालेच. पण आपल्या शिष्याच्या या शीघ्रगणनशक्तीचा प्रत्यय येऊन त्यास सानंद अभिमान वाटल्याशिवाय राहिला नाहीं.

एफ्. आर. एस्. पदवीचा लाभ :

अशा स्थितींत असतांनाही रामानुजन्नें ऊनकेंद्रीय राशि (Elliptic Functions) अनंत अपूर्णांक, संख्याशास्त्र, चतुर्थमान (Fourth Dimension) या विषयांवरील आपलें संशोधन चालूच ठेवलें होतें. त्यामुळें त्याला गणितज्ञांच्या मालिकेंत एक महत्त्वाचें स्थान प्राप्त झालें होतें. तशांत त्याला इ. स. १९१८त रॉयल सोसायटी ऑफ इंग्लंड हिचा F. R. S. चा अत्यंत बहुमानाचा किताब मिळाला. भारतवर्षांतल्या व्यक्तींत रामानुजन् हे पहिलेच F. R. S. होत. तशांत ते सर्वांत तरुण F. R. S. होत. कारण वयाच्या केवळ तिसाव्या वर्षींच हा बहुमान त्यांनीं पटकाविला. लगोलग ते ट्रिनिटी कॉलेजचेही पहिले हिंदी फेलो झाले.

हिंदुस्थानला परत :

पण यानंतर रामानुजन्ची तब्येत अतिशय बिघडली. त्यांना इंग्लंडमध्येंच ठेवणें हेंही धोक्याचें वाटूं लागलें. त्यापेक्षां हिंदुस्थानला परत जाऊन तिकडेच आपल्या घरच्या सान्निध्यांत, गांवच्या हवेंत त्यास अधिक बरें वाटेल असा पोक्त विचार करून प्रो. हार्डी यांनीं मोठ्या नाइलाजानें त्याला इ. स. १९१९ त परत पाठविलें. हिंदुस्थानांत आल्यावरसुद्धां त्याला

$ १७२९ = १००० + ७२९ = $१०^3 + ९^3$.
= १ + १७२८ = $१^3 + १२^3$.

आपलें संशोधन निर्घोर करतां यावें, नोकरीची अडचण पडूं नये म्हणून मद्रास युनिव्हर्सिटीनें वेतनाची सोय केली होती.

आजार व निधन :

मयलापूर येथें एक बंगला घेऊन त्यांत तो राहूं लागला. पण तेथें बरें वाटेना. कांहीं दिवस तब्येत बरी होती. पण तेथून तो कोडुमुडी येथें हवा बदलण्यास गेला. तेथें एप्रिल १९२० पर्यंत राहिला. पण तेथे त्याची प्रकृति अतिशयच बिघडली. तेव्हां तो चेतपट येथें गेला. पण प्रकृति एकदां जी ढांसळली होती ती अधिकच खराब झाली. व अशा रीतीनें खंगत खंगत तो ता. २६ एप्रिल १९२० रोजीं परमात्म्यांत विलीन झाला.

रामानुजन्‌बद्दल प्रो. हार्डी यांचें मत :

रामानुजन् बद्दल व त्याच्या संशोधनासंबंधीं अधिकारवाणीनें मत देऊं शकणारे असे दोनच गृहस्थ होते. एक प्रो. हार्डी व दुसरे शेषु अय्यर दोघांनींही रामानुजन्‌ला जवळून पाहिलें होतें. दोघेही त्याचे शिक्षक होते. ते व इतर रामानुजन्‌चे चाहाते यांना रामानुजन्‌विषयीं काय वाटत होतें तें थोडक्यांत सांगतों.

हार्डीसाहेब म्हणतात, "रामानुजन्‌इतका तीव्रबुद्धी शीघ्रगणक माझ्या आढळण्यांत नाहीं. या बाबतींत त्याची तुलना फक्त 'ऑयलर' या गणित्याशींच होऊं शकेल. जगांतल्या प्रथम श्रेणीच्या गणितज्ञांत हिंदुस्थानचा एक प्रतिनिधि असण्याचें परमभाग्य हिंदुस्थानच्या वांट्याला आलें आहे. त्याचें अप्रसिद्ध असें लिखाण माझ्याजवळ इतकें आहे कीं तें प्रसिद्ध करण्यास पुष्कळ वर्षें लागतील. आपल्या स्वतंत्र संशोधनानें त्यानें हिंदुस्थानची कीर्ति सर्व जगांत पसरविली आहे. रामानुजन्‌ला मी शिकविलें असें जगाला वाटतें पण खरें पाहिलें तर तो मजजवळ जितकें शिकला

त्यापेक्षां कितीतरी अधिक मी त्याच्याजवळ शिकलों. संख्याशास्त्राच्या सिद्धांतसमुद्रांत बुडी मारण्यास भिणारे इतर विद्यार्थी, तर तो समुद्र पोहून जाण्याचें सामर्थ्य असणारा रामानुजन् ! रामानुजन्ला जर २६ वयाऐवजीं १६ व्या वर्षीं आधुनिक गणिताचा श्रीगणेशा गिरविण्यास मिळाला असता तर जगाला याहूनही आश्चर्यकारक असे सिद्धांत पाहावयास मिळाले असते. आजपासून २५ वर्षें गेल्याशिवाय रामानुजन्च्या कार्याचें महत्त्वमापन कोणी करण्याच्या भरीस पडूं नये. गणितज्ञांच्या मालिकेंत त्यास कोणतें स्थान द्यावें याविषयीं आतांच निर्णय करणें अशक्य आहे. पण ही गोष्ट त्रिवार सत्य आहे कीं त्याच्या तोडीचा अजिंक्य प्रतिभेचा गणिती पुन्हां लवकर होणें कठीण दिसतें."

रँग्लर परांजपे, दि. ब. आर् रामचंद्र राव यांनींही अशींच मतें व्यक्त केलीं आहेत. श्री. बाळकराम I. C. S. हे इ.स. १९२१ च्या मॅथेमॅटिकल परिषदेच्या अध्यक्षपदावरून रामानुजन्संबंधीं म्हणतात कीं, "प्रो. हार्डीनीं रामानुजन्चा शोध लावला व त्याच्या शिक्षणाची सर्व प्रकारें दखल घेऊन हिंदुस्थानला उपकृत केलें, त्या हार्डींचे आपण किती ऋणी असलें पाहिजे!"

प्रश्न

१. रामानुजन्ला शाळेच्या इन्स्पेक्टरांनीं शाबासकी कां दिली ?

२. रामानुजन् आपलें कॉलेजचें शिक्षण पुढें कां करूं शकला नाहीं ?

३. गणितशास्त्रांतलीं तीन अशक्य प्रमेयें कोणतीं ?

४ रामानुजन्ला इंग्लंडांत आजारी पडण्यास कोणतीं कारणें झालीं ?

५ रामानुजन् आपले शोध हार्डीसाहेबांस दाखविण्यास कां बिचकत होता ?

६. रामानुजन्च्या गणिताच्या अभ्यासांत कोणतें न्यून होतें ?

७. संख्यांचें दलीकरण म्हणजे काय? पांच या संख्येच्या दलपर्याया-प्रमाणें ६ व ७ यांचे दलपर्याय लिहून दाखवा.

८. मोटारीचा अभद्र नंबर कोणता? रामानुजन्ला तो नंबर कां आवडत होता?

९. रामानुजन्चें कार्य व योग्यता यांचें थोडक्यांत वर्णन करा.

१०. रामानुजन्चें खालील कोडें सोडवा.

एका कपाटांत ज्ञानकोशाचे तीन भाग अनुक्रमें डावीकडून उजवीकडे एक, दोन, तीन या क्रमानें ठेवलेले आहेत. प्रत्येक भागाची पाठीकडची बाजू आपणांस दिसत आहे. (वाचनालयांत ठेवतात त्याप्रमाणें) प्रत्येक भागाचा पुठ्ठा $\frac{1}{8}$ इंच जाड असून मधली सर्व पानें मिळून १ इंच जाड होतात. वाळवीच्या एका किड्यानें हे सर्व भाग चिकटून उभे असतां पहिल्या भागाच्या पहिल्या पान पासून तों शेवटच्या भागाच्या शेवटच्या पानापर्यंत एक बरोबर आरपार आडवें भोंक पाडलें. तर त्या भोंकाची लांबी किती?

उत्तर ··· १$\frac{1}{2}$ इंच.

समाप्त

भारतीय गणिती

भारतीय गणिती

भारतीय गणिती या पुस्तकात पहिला आर्यभट, ब्रह्मगुप्त दुसरा; भास्कराचार्य आणि रामानुजम् अशा चार भारतीय गणित शास्त्रज्ञांची चरित्रे दिली आहेत. प्रत्येक चरित्रात त्या व्यक्तीचे जीवनचरित्र, त्याने लावलेले शोध व त्याची योग्यता, अशा क्रमाने माहिती दिली आहे. ब्रह्मगुप्त १४०० वर्षांपूर्वी होऊन गेला; तर भास्कराचार्य ८०० वर्षांपूर्वी होऊन गेला; म्हणून त्यांच्या चरित्राबद्दल पुराव्यानिशी माहिती फारच कमी मिळते. तरीही शक्य तितकी जास्त माहिती देण्याचा प्रयत्न केला आहे.

या पुस्तकात ठिकठिकाणी संस्कृत अवतरणे दिली आहेत. तसेच काही उदाहरणे व त्यांच्या रीती दिल्या आहेत. तरीही विषय फार किचकट होऊ नये याची काळजी घेतली आहे.

हे पुस्तक वाचल्यावर भारतीयांना; अंक-पद्धती, अंकगणितातील अष्टकर्मे, बीजगणितातील शोध यांची किती माहिती होती हे समजेल. तसेच पायथॅगोरसचा सिद्धान्त, पृथ्वीचे अक्षभ्रमण, गुरुत्वाकर्षण इत्यादी गोष्टींचे ज्ञान भारतीयांना होते, हे वाचून वाचकांना आश्चर्य वाटेल आणि गणित शास्त्रात प्राचीन काळापासून भारतीयांची किती प्रगती झाली होती. त्याचे योग्य ज्ञान होईल. या पुस्तकाचे लेखक प्रा. ना. ह. फडके संस्कृतचे गाढे पंडित असून मुंबई विद्यापीठात गणिताचे प्रमुख प्राध्यापक होते. त्यांचे हे महत्त्वाचे पुस्तक विद्यार्थ्यांसाठी पुन्हा एकदा वरदा बुक्सने सादर केले आहे.